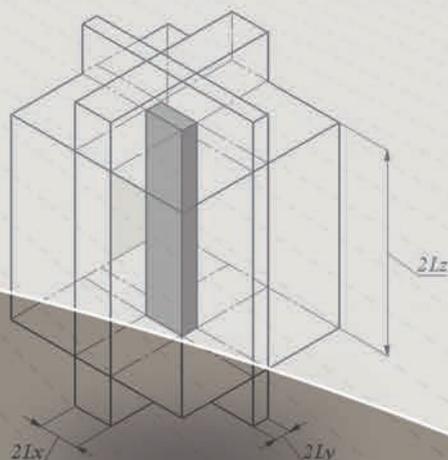


# Transferencia de Masa y Energía: Ejercicios resueltos

José M. Desantes | Santiago Molina  
F. Javier Salvador | Pablo Fajardo



$$\left( \frac{T_{(x,y,z)} - T_{\infty}}{T_1 - T_{\infty}} \right)_{3D}$$



---

# Transferencia de Masa y Energía: Ejercicios Resueltos

---

José M. Desantes  
Santiago Molina  
Francisco Javier Salvador Rubio  
Pablo Fajardo

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Máquinas y Motores Térmicos de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: DESANTES FERNÁNDEZ, J. M. [et al] (2014) *Transferencia de masa y energía: ejercicios resueltos*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2014 (versión impresa)  
Primera edición, 2014 (versión electrónica)

© José M. Desantes Fernández  
Santiago Molina Alcaide  
Francisco Javier Salvador Rubio  
Pablo Fajardo Peña

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València  
*distribución*: Telf.: 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.:6162\_01\_01\_01

ISBN: 978-84-9048-207-0 (versión impresa)  
ISBN: 978-84-9048-210-0 (versión electrónica)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

# Índice general

Índice general	III
Nomenclatura	V
Introducción	VII
1 Conceptos generales de transferencia de masa y energía	1
1.1 Convección - difusión de una especie . . . . .	3
1.2 Difusión de helio en plástico . . . . .	6
1.3 Función disipación - capa límite . . . . .	8
1.4 Ley de Stokes . . . . .	10
1.5 Conducción - Convección - Radiación . . . . .	17
1.6 Placa plana inmersa en una corriente de aire . . . . .	21
2 Transferencia de energía con campo de velocidad	25
2.1 Campo de velocidades entre dos placas . . . . .	27
2.2 Campo de velocidades entre dos placas con gradiente de presión . . . . .	30
2.3 Campo de velocidades y temperatura entre dos placas . . . . .	36
2.4 Campo de velocidades y de temperaturas entre dos placas con gradiente de presión . . . . .	42
3 Transferencia de calor: Conducción - convección	53
3.1 Ventana de una aeronave . . . . .	55
3.2 Depósito de oxígeno líquido . . . . .	62
3.3 Radio crítico . . . . .	69
3.4 Tubería cilíndrica. Espesor crítico de aislamiento . . . . .	73

4	Transferencia de calor en superficies extendidas	93
4.1	Cilindro de motor con aletas . . . . .	95
4.2	Distribución de temperatura en una aleta rectangular . . . . .	99
4.3	Alabe de una turbina de gas . . . . .	108
5	Transitorios térmicos	119
5.1	Enfriamiento del papel de aluminio . . . . .	121
5.2	Tiempo de cocinado . . . . .	125
5.3	Termopar . . . . .	133
5.4	Medida de temperatura con un hilo delgado . . . . .	141
5.5	Cilindro en una corriente de aire . . . . .	153
5.6	Transitorio térmico de una esfera . . . . .	163
5.7	Aislamiento térmico de un misil . . . . .	172
5.8	Satélite en el espacio . . . . .	183
5.9	Transitorio de un cuerpo sumergido en un recipiente . . . . .	191
5.10	Placa de titanio . . . . .	204
5.11	Lata de leche condensada . . . . .	214
5.12	Tratamiento térmico de recocido . . . . .	220
	Anexos	231
	Bibliografía	235

# Tabla de símbolos

## *Latinos*

$A$	Área	$m^2$
$a$	Velocidad del sonido	$m/s$
$c$	Concentración molar	$kmol/m^3$
$C_p$	Calor específico a presión constante	$kJ/kg \cdot K$
$C_D$	Coefficiente de resistencia	— — —
$D$	Difusividad másica	$m^2/s$
$D_h$	Diámetro hidráulico	$m$
$e$	espesor	$m$
$F$	Fuerza	$N$
$g$	Aceleración de la gravedad	$m/s^2$
$h$	Coefficiente de película	$W/m^2 \cdot K$
$J$	Flujo molar	$kmol/m^2$
$k$	Conductividad	$W/m \cdot K$
$L$	Longitud	$m$
$L_c$	Longitud característica	$m$
$m$	Masa	$kg$
$\dot{M}$	Flujo másico	$kg/s \cdot m^2$
$\dot{m}$	Gasto másico	$kg/s$
$p$	Presión	$bar, Pa$
$P$	Perímetro mojado	$m$
$PM$	Peso molecular	$kg/kmol$
$q, Q$	Calor	$J$
$\dot{q}$	Potencia calorífica	$W$
$R$	Constante específica del gas	$J/kg \cdot K$
$T$	Temperatura	$^{\circ}C, K$
$t$	Tiempo	$s$
$u$	velocidad	$m/s$
$V$	Volumen	$m^3$
$Y$	Fracción másica	— —
$x$	Fracción molar	— —
$x, y, z$	Coordenadas geométricas	$m$

**Griegos**

$\alpha$	Difusividad térmica	$\text{m}^2/\text{s}$
$\beta$	Coefficiente de expansión volumétrica	$1/\text{K}$
$\gamma$	Relación de calores específicos	--
$\Delta$	Variación de un parámetro	--
$\epsilon$	Emisividad	--
$\rho$	Densidad	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\mu$	Viscosidad dinámica	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$
$\nu$	Viscosidad cinemática	$\text{m}^2/\text{s}$
$\theta$	Temperatura adimensional	--
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann ( $5,67 \cdot 10^{-8}$ )	$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$
$\tau$	Cortante - Tiempo característico	$\text{N}/\text{m}^2 - \text{s}$
$\Phi$	Función disipación	$\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}^2$

**Subíndices y superíndices**

$A$	Especie A
$ac$	Acero
$ai$	Aire
$c$	Correlación
$cu$	Cobre
$e$	Experimental
$w$	Cable (wire)

**Números adimensionales**

Bi	Número de Biot	$h \cdot L/k$
Br	Número de Brinkman	$\mu \cdot u^2/(k \cdot \Delta T)$
Fo	Número de Fourier	$\alpha \cdot t/L^2$
Fr	Número de Froude	$u^2/(g \cdot L)$
Gr	Número de Grashof	$g \cdot \beta \cdot L^3 \cdot \Delta T/\nu^2$
Le	Número de Lewis	$\alpha/D$
M	Número de Mach	$u/a$
Nu	Número de Nusselt	$h \cdot L/k$
Pe	Número de Peclet (térmico)	$u \cdot L/\alpha$
	Número de Peclet (másico)	$u \cdot L/D$
Pl	Número de Planck	$(k/L)/(\sigma \cdot \epsilon \cdot T^4)$
Pr	Número de Prandtl	$C_p \cdot \mu/k$
Ra	Número de Rayleigh	$\text{Gr} \cdot \text{Pr}$
Re	Número de Reynolds	$u \cdot L/\nu$
Sc	Número de Schmidt	$\nu/D$
St	Número de Stokes	$\rho_o \cdot u_o \cdot d_o/(18 \cdot \rho_a \cdot \nu_a)$

# Introducción

En este libro se recogen una serie de ejercicios enmarcados en los contenidos de un curso de transferencia de masa y energía. El objetivo principal del libro es que sirva de ayuda a la hora de aplicar los conocimientos adquiridos del estudio de los conceptos teóricos de los temas aquí desarrollados.

Para que el libro sea de utilidad, se recomienda que el lector intente resolver los ejercicios por sí solo, utilizando para ello sus apuntes, los libros de la bibliografía y/o cualquier material que considere oportuno. Una vez efectuado este paso el libro debe servir para verificar si los razonamientos han sido correctos o no. Probablemente si el lector sigue el desarrollo de cualquiera de los problemas aquí resueltos no tendrá ningún problema en entenderlos ya que estos están explicados paso a paso y con riguroso detalle, sin embargo, no habrá adquirido una de las destrezas más importante que debe poseer un Ingeniero, que es la capacidad de resolver (o al menos intentar) un problema nuevo, como los que probablemente se le presenten en su vida profesional.

El libro está dividido en cinco capítulos, los dos primeros abordan temas básicos de transferencia de masa y energía en diferentes tipos de aplicaciones, con ellos se pretende que el lector se familiarice con los conceptos y con la aplicación de los números adimensionales y como estos sirven para comprender y/o cuantificar un problema.

El tercer capítulo está dedicado a ejercicios de transferencia de calor por conducción y convección de forma individual y combinada. Con estos ejercicios se pretende que se pueda asimilar los conceptos fundamentales de los fenómenos involucrados en la transferencia de calor.

El cuarto capítulo aborda una aplicación muy común en transferencia de calor como son las superficies extendidas (aletas). El objetivo de estos ejercicios es que el lector sea capaz de plantear y resolver problemas donde se ha incrementado la transferencia de calor por medio de estos elementos.

Para finalizar el último capítulo, y el más extenso, está destinado a ejercicios de transferencia de calor durante transitorios térmicos. Se abordan problemas de medida de temperatura, tratamientos térmicos y otra serie de cuestiones generales, que sirven para que el lector comprenda que los conceptos que ha aprendido tienen un gran campo de aplicación en la vida cotidiana. Los ejercicios planteados en este capítulo también son en su mayoría problemas combinados, donde el lector además

de saber plantear la ecuación de la energía deberá ser capaz de aplicar los conceptos de las tres formas de transmisión de calor.

La bibliografía que se encuentra al final del libro debe servir al lector para revisar y/o estudiar los conceptos teóricos necesarios para la resolución de los ejercicios planteados en este libro. Se ha dividido en bibliografía básica y de consulta de forma tal de que aquella persona que quiera profundizar algún tema en particular pueda recurrir a esta última.

Para concluir, es nuestro deseo que el libro sea de utilidad para el lector y siendo este una herramienta más para el aprendizaje de los fenómenos de transferencia de masa y energía.

# Capítulo 1

## Conceptos generales de transferencia de masa y energía



## 1.1 Convección - difusión de una especie

Si se considera una especie  $A$ , con una velocidad característica  $u$ , en un sistema multicomponente.

Se pide:

1. Encontrar un número adimensional que relacione el transporte de masa de la especie  $A$  por convección y por difusión. Para ello tomar  $L_c$  como longitud característica.
2. Cuantificar en órdenes de magnitud la relación entre los números de Re y Sc para el caso que la especie  $A$  sea  $H_2$  difundándose en aire a 300 K y 1 bar.
3. Cuantificar en órdenes de magnitud la relación entre los números de Re y Sc para el caso que la especie  $A$  sea etanol difundándose en agua a 300 K.

### Apartado 1

El problema se puede plantear empleando magnitudes físicas o de forma adimensional.

Para el primer caso se analiza con qué parámetros se escala el transporte de masa convectivo y el difusivo.

- Convectivo:  $\sim \rho \cdot u \cdot Y_A$
- Difusivo:  $\sim \rho \cdot D_A \cdot Y_A / L_c$

Calculando la relación entre ambos se puede obtener:

$$\frac{\rho \cdot u \cdot Y_A}{\rho \cdot D_A \cdot Y_A / L_c} = \frac{u \cdot L_c}{D_A}$$

La relación adimensional obtenida se conoce como número de Peclet (Pe).

En un problema dado, si el número de Peclet es grande, indica que el proceso convectivo es el dominante y si es pequeño el proceso dominante es el difusivo.

De forma adimensional se puede llegar al mismo número adimensional, para ello se aplica el teorema II.

Las variables del problema son:

$$\begin{aligned} u & \text{ [L/T]} \\ D_A & \text{ [L}^2\text{/T]} \\ \rho & \text{ [M/L}^3\text{]} \\ L_c & \text{ [L]} \end{aligned}$$

Dado que hay 4 variables y 3 magnitudes independientes, el problema se resuelve con un número adimensional.

$$\pi_1 = u \cdot \rho^a \cdot D_A^b \cdot L_c^c \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}}\right) \cdot \left(\frac{\text{M}}{\text{L}^3}\right)^a \cdot \left(\frac{\text{L}^2}{\text{T}}\right)^b \cdot \text{L}^c$$

$$[\text{M}] \Rightarrow a = 0$$

$$[\text{T}] \Rightarrow -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$[\text{L}] \Rightarrow 1 - 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$\pi_1 = u \cdot \rho^0 \cdot D_A^{-1} \cdot L_c^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u \cdot L_c}{D_A}$$

Que es el mismo número adimensional obtenido del primer análisis del problema.

El número de Peclet también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Peclet} = \text{Pe} = \frac{u \cdot L_c}{D_A} = \frac{u \cdot L_c}{\nu_A} \cdot \frac{\nu_A}{D_A} = \text{Re} \cdot \text{Sc}$$

Donde  $\nu_A$  es la viscosidad cinemática del fluido, Sc el número de Schmidt y Re el número de Reynolds.

## Apartado 2

El coeficiente de difusión del  $\text{H}_2$  en aire es  $D_{\text{H}_2\text{-aire}} = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y las propiedades del hidrógeno sacadas de tablas y son:

$$\mu_{\text{H}_2} = 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho_{\text{H}_2} = 0,09 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_{\text{H}_2} = \mu_{\text{H}_2} / \rho_{\text{H}_2} = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando los valores de las propiedades en la ecuación correspondiente se puede obtener el número de Schmidt.

$$Sc = \frac{\nu_A}{D_A} = \frac{9,9 \cdot 10^{-5}}{7,9 \cdot 10^{-5}} = 1,25$$

Para este caso en que el fluido que fluye es un gas en otro gas el número de Schmidt es del orden de 1, por lo tanto los números de Reynolds y Peclet deben ser magnitudes similares.

### Apartado 3

El coeficiente de difusión del etanol en agua es  $D_{etanol-agua} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  y las propiedades del etanol sacadas de tablas y son:

$$\mu_{etanol} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho_{etanol} = 790 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\nu_{etanol} = \mu_{etanol} / \rho_{etanol} = 1,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando los valores de las propiedades se puede obtener el número de Schmidt.

$$Sc = \frac{\nu_A}{D_A} = \frac{1,49 \cdot 10^{-6}}{1,2 \cdot 10^{-9}} = 1,2 \cdot 10^3$$

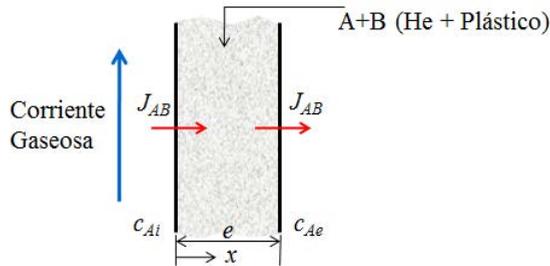
Para este caso en que el fluido que fluye es un líquido en otro líquido el número de Schmidt es del orden de  $10^3$ , por lo tanto, los números de Reynolds y Peclet deben diferir en tres órdenes de magnitud.

## 1.2 Difusión de helio en plástico

Se emplea una membrana de plástico de espesor  $e$  para separar helio de una corriente gaseosa, siendo  $D_{AB}$  el coeficiente de difusividad del helio respecto del plástico y  $c_{Ai}$  y  $c_{Ae}$  ( $\text{kmol}/\text{m}^3$ ) la concentración molar de helio en las superficies interna y externa de la membrana respectivamente.

Se pide:

1. Determinar cuál es el flujo molar de helio  $J_{AB}$  separado de la corriente gaseosa.
2. Determinar el flujo másico de helio separado, de la corriente gaseosa, considerando los siguientes datos:  $e = 1 \text{ mm}$ ,  $D_{AB} = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $c_{Ai} = 0,01 \text{ kmol}/\text{m}^3$ ,  $c_{Ae} = 0,005 \text{ kmol}/\text{m}^3$



### Apartado 1

La concentración molar en la membrana de plástico será:

$$c = c_A + c_B$$

Teniendo en cuenta que  $c_B \gg c_A$  se puede asumir que:  $c \approx c_B = cte$  y que depende sólo de la composición de la membrana.

Para determinar el flujo molar de helio a través de la membrana empleamos la ley de Fick. En realidad la ley de Groot que es el caso general de la ley de Fick sin suponer el sistema isobárico e isotermo.

$$J_{AB} [\text{kmol}/\text{m}^2 \cdot \text{s}] = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dx}$$

Donde  $x_A$  es la fracción molar de la especie A, definida como  $x_A = c_A/c$ .

Reemplazando se obtiene:

$$J_{AB} \text{ [kmol/m}^2 \cdot \text{s]} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dx}$$

Si el sistema es estacionario y se considera que la membrana es suficientemente delgada para que el proceso sea unidimensional,  $J_{AB}$  debe ser independiente de  $x$ , por lo tanto:

$$D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dx} = cte = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e}$$

De este modo el flujo molar de helio  $J_{AB}$  es:

$$J_{AB} = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e} \text{ [kmol/m}^2 \cdot \text{s]}$$

## Apartado 2

Reemplazando valores en la ecuación obtenida en el apartado anterior se obtiene el flujo molar de helio.

$$J_{AB} = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e} = 10^{-9} \cdot \frac{0,01 - 0,005}{0,001}$$

$$J_{AB} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ kmol/m}^2 \cdot \text{s}$$

El flujo másico de helio será:

$$\dot{M}_A = PM_A \cdot J_{AB}$$

Siendo  $PM_A$  el peso molecular del helio, que tiene un valor de 4 kg/kmol.

$$\dot{M}_A = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

### 1.3 Función disipación - capa límite

En la capa límite incompresible el perfil de velocidad se puede representar por:

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad \text{para } y \leq \delta$$

Donde  $u_\infty$  la velocidad del fluido fuera de la capa límite,  $\delta$  es el espesor de la capa límite e  $y$  la distancia perpendicular a la superficie que limita el flujo.

Se pide:

1. Identificar un parámetro que caracterice la función de disipación adimensional.
2. Analizar como varía este parámetro en función de  $y/\delta$ .

#### Apartado 1

La función disipación, particularizada a este problema unidimensional es:

$$\Phi = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2$$

Derivando el perfil de velocidades, se obtiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = u_\infty \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{3}{2 \cdot \delta} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

Reemplazando en la función disipación.

$$\Phi = \mu \cdot \left[ u_\infty \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{3}{2 \cdot \delta} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \right]^2$$

Operando y agrupando convenientemente se puede encontrar un número de disipación adimensional.

$$\Phi^* = \frac{\Phi \cdot \delta^2}{\mu \cdot u_\infty^2} = \left[ \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) \right]^2$$

El mismo análisis se puede realizar para el esfuerzo cortante  $\tau$ . Partiendo de la definición del esfuerzo cortante, reemplazando el valor de la derivada de la velocidad y ordenando convenientemente se puede obtener:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \tau^* = \frac{\tau \cdot \delta}{\mu \cdot u_\infty} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)$$

Observar que la función disipación adimensional es igual al cuadrado del esfuerzo cortante adimensional  $\Phi^* = \tau^{*2}$ .

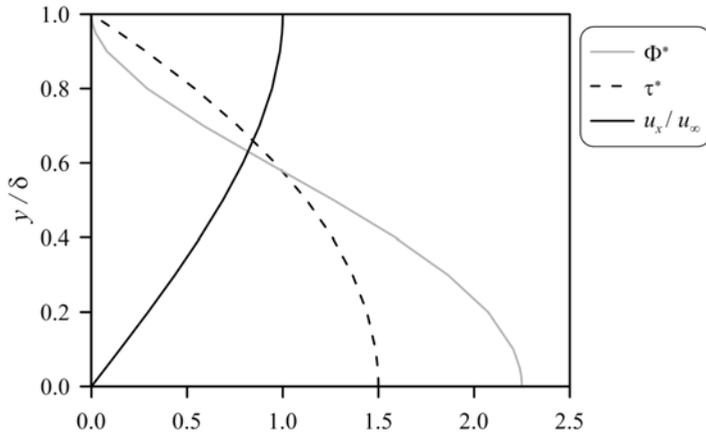
## Apartado 2

Particularizando para los extremos de la capa límite las ecuaciones obtenidas en el apartado 1 se obtiene:

$$\text{Para } y/\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^* = 9/4 \quad \text{y} \quad \tau^* = 3/2$$

$$\text{Para } y/\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi^* = 0 \quad \text{y} \quad \tau^* = 0$$

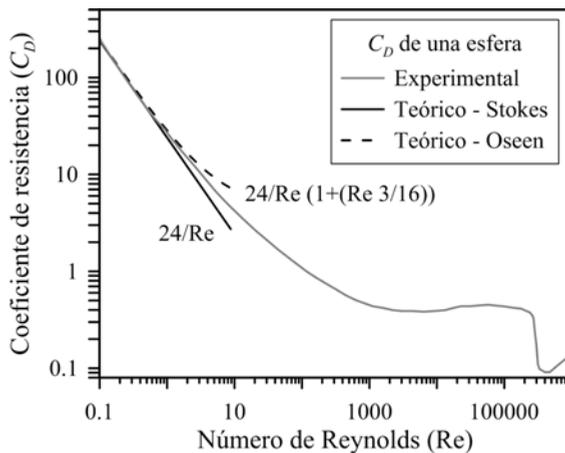
Las ecuaciones obtenidas y el perfil de velocidades se pueden representar en función de  $y/\delta$  como se muestra en la figura 1.3.1.



**Figura 1.3.1:** Perfil de velocidades,  $\Phi^*$  y  $\tau^*$  en función del parámetro  $y/\delta$ .

## 1.4 Ley de Stokes

Una esfera de radio  $r$  y densidad  $\rho_E$  inmersa en un fluido de densidad  $\rho_A$  y viscosidad cinemática  $\nu_A$  se deja caer desde el reposo. Se supone que el coeficiente de resistencia sigue la ley de Stokes ( $C_D = 24/\text{Re}$ ).



Se pide:

1. Encontrar una expresión para la fuerza de resistencia viscosa en función de las propiedades del fluido.
2. Plantear la ecuación diferencial que permite obtener la velocidad  $u$  de la esfera en función del tiempo y hallar la velocidad límite.
3. Comprobar que la solución a la ecuación obtenida en el apartado anterior es de la forma:

$$u/u_L = 1 - e^{-t/\tau}$$

Donde  $u_L$  es la velocidad límite en condiciones laminares y  $\tau$  un tiempo característico que cumple la ecuación  $\tau = m/k$ , siendo  $m$  la masa de la esfera y  $k = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A$

4. Determinar el valor del cociente  $t/\tau$  para el que la velocidad de la esfera alcanza el 95 % de la velocidad terminal. ¿Cómo se puede reducir este tiempo?
5. Teniendo en cuenta que el régimen laminar o régimen de Stokes se extiende hasta  $\text{Re} = 1$ , determinar una expresión que relacione la viscosidad cinemática mínima del fluido con el radio de la esfera para garantizar condiciones laminares y confirmar que  $\nu_A \sim r^{3/2}$ .

6. Determinar el valor de la velocidad límite, el tiempo para alcanzarla y el número de Reynolds máximo para los datos siguientes, correspondientes a una bola de aluminio ( $\rho_E = 2700 \text{ kg/m}^3$  y  $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ) inmersa en aceite ( $\rho_E = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_A = 880 \text{ kg/m}^3$  y  $\nu_A = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ).
7. Calcular el número de Stokes (St) y el de Froude (Fr) y analizar la influencia de las fuerzas de inercia, las viscosas y las debidas la gravedad.

### Apartado 1

El flujo alrededor de una esfera en la corriente de Stokes tiene solución analítica y la fuerza de resistencia en el movimiento relativo esfera-fluido está controlada por el gradiente de velocidad y la viscosidad del fluido. Es decir, la fuerza de resistencia es proporcional a un gradiente de velocidad que puede representarse como  $u/r$ , la viscosidad  $\mu$  y a un área que prescindiendo de las constantes será proporcional a  $r^2$ .

$$F_R \sim \mu_A \cdot \frac{u}{r} \cdot r^2$$

Otra forma de hallar la fuerza de resistencia para la esfera es a partir de la definición del coeficiente de resistencia  $C_D$ .

$$\frac{F_R}{A} = C_D \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2}$$

Donde  $A$  es el área proyectada y el término que multiplica a  $C_D$  es la energía cinética por unidad de volumen o presión de parada (o de remanso).

$$F_R = C_D \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

Combinando la ecuación anterior con el coeficiente de resistencia dado en el enunciado se obtiene:

$$F_R = \frac{24 \cdot \nu_A}{u \cdot 2 \cdot r} \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A \cdot u = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu_A \cdot u$$

Ecuación conocida como la fórmula de Stokes para la resistencia de una esfera.

A los efectos del problema se define como  $k$  a los términos que multiplican a la velocidad, es decir:

$$k = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A \quad \Rightarrow \quad F_R = k \cdot u$$

## Apartado 2

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para la esfera se puede plantear como:

$$m \cdot \frac{du}{dt} = F_g - F_R$$

Siendo  $F_R$  la fuerza de resistencia obtenida en el apartado anterior y  $F_g$  la fuerza gravitacional que se puede calcular como:

$$F_g = (\rho_E - \rho_A) \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

La velocidad límite se alcanza cuando la velocidad alcanza un valor constante en el tiempo, es decir cuando  $du/dt = 0$ , para este caso  $F_R = F_g$ .

$$F_r = F_g = k \cdot u_L \quad \Rightarrow \quad u_L = F_g/k$$

Reemplazando  $F_g$  y  $k$  por sus valores correspondientes se obtiene:

$$u_L = \frac{F_g}{k} = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A \cdot \nu_A}$$

## Apartado 3

La ecuación diferencial planteada en el apartado anterior es de variables separadas y se puede escribir como:

$$m \cdot \frac{du}{dt} = F_g - k \cdot u \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{\frac{F_g}{m} - \frac{k \cdot u}{m}}$$

$$\frac{k}{m} \cdot dt = \frac{du}{\frac{F_g}{k} - u}$$

Integrando:

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left( \frac{F_g}{k} - u \right) + cte$$

Aplicando la condición inicial, para  $t = 0 \rightarrow u = 0$ .

$$cte = -\ln \left( \frac{F_g}{k} \right)$$

Remplazando el valor de la constante y operando se obtiene:

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left( \frac{F_g}{k} - u \right) - \ln \left( \frac{F_g}{k} \right)$$

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left( 1 - \frac{u}{F_g/k} \right)$$

$$\frac{u}{F_g/k} = 1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $u_L = F_g/k$  y definiendo el tiempo característico como  $\tau = m/k$  se llega a:

$$\frac{u}{u_L} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

#### Apartado 4

Para obtener el tiempo para el que se alcanza el 95 % de la velocidad límite se reemplaza los valores en la ecuación obtenida en el apartado anterior.

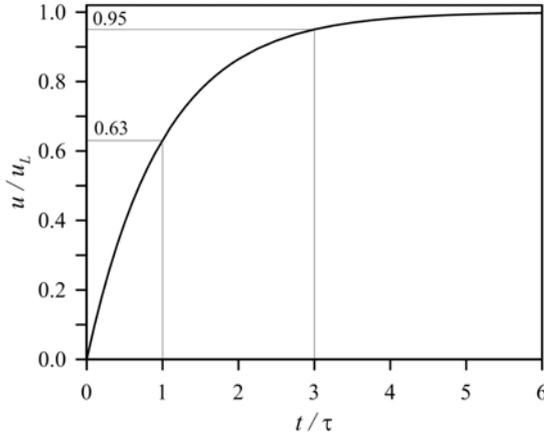
$$\frac{u}{u_L} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,95 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0,05) = -2,996$$

$$\frac{t}{\tau} \sim 3 \quad \Rightarrow \quad t = 3\tau$$

Es decir, el tiempo físico para alcanzar el 95 % de la velocidad límite es tres veces el tiempo característico del sistema.

En la figura 1.4.1 se ha representado la solución al problema, indicando el tiempo característico  $\tau$  y  $3\tau$ .



**Figura 1.4.1:** Cociente  $u/u_L$  en función de  $t/\tau$ .

Teniendo en cuenta que el tiempo característico es:

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_E}{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A}$$

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho_E \cdot r^2}{\rho_A \cdot \nu_A}$$

Para reducir el tiempo característico se puede actuar sobre la esfera o sobre el fluido:

- En la esfera, disminuyendo su masa, ya sea disminuyendo su densidad y/o su tamaño.
- En el fluido, aumentando la fuerza de resistencia que ofrece, esto se logra aumentando la densidad y/o la viscosidad.

## Apartado 5

Partiendo de la definición del número de Reynolds se puede escribir que:

$$\text{Re} = \frac{u \cdot 2 \cdot r}{\nu_A} \quad \Rightarrow \quad \nu_A = \frac{u \cdot 2 \cdot r}{\text{Re}}$$

Considerando que  $\text{Re} \leq 1$ .

$$\nu_A \geq u \cdot 2 \cdot r$$

En el caso extremo  $u = u_L$ , y de acuerdo con el valor obtenido en el apartado 2 para la velocidad límite:

$$\nu_A \geq \left( \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A \cdot \nu_A} \right) \cdot 2 \cdot r$$

$$\nu_A^2 \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{r^3 \cdot g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A}$$

$$\nu_A \geq \frac{2}{3} \cdot r^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A}}$$

La expresión anterior muestra que la viscosidad cinemática mínima para garantizar  $\text{Re} \leq 1$  se escala efectivamente con  $r^{3/2}$ .

## Apartado 6

Para los datos del problema se puede obtener la velocidad límite.

$$u_L = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A \cdot \nu_A} = \frac{2}{9} \cdot \frac{0,002^2 \cdot 9,8 \cdot (2700 - 880)}{880 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}}$$

$$u_L = 0,04 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds máximo, será por lo tanto:

$$\text{Re} = \frac{u \cdot 2 \cdot r}{\nu_A} = \frac{0,04 \cdot 2 \cdot 0,002}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 0,355 \leq 1$$

Finalmente, el tiempo para alcanzar el 95 % de la velocidad límite del problema es:

$$\tau = \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho_E \cdot r^2}{\rho_A \cdot \nu_A} = \frac{2}{9} \cdot \frac{2700 \cdot 0,002^2}{880 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}}$$

$$\tau = 6,06 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad t = 3 \cdot \tau = 0,018 \text{ s}$$

## Apartado 7

El número de Reynolds (obtenido en el apartado anterior) indica condiciones laminares del movimiento de la partícula por lo que el movimiento está dominado por las fuerzas viscosas.

En condiciones laminares para este tipo de problemas se puede comprobar que  $Fr \approx St$  y en este caso son ambos muy inferiores a la unidad.

$$St = \frac{1}{18} \cdot \frac{\rho_E}{\rho_A} \cdot \frac{u_L \cdot 2 \cdot r}{\nu_A} = \frac{1}{18} \cdot \frac{2700}{880} \cdot \frac{0,04 \cdot 2 \cdot 0,002}{4,5 \cdot 10^{-4}}$$

$$St = 0,060$$

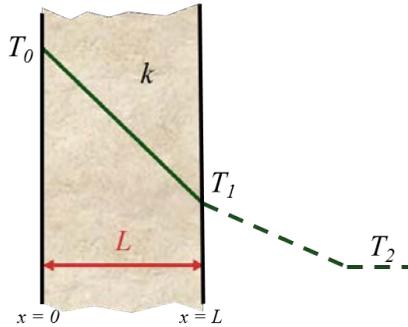
$$Fr = \frac{u_L^2}{g \cdot 2 \cdot r} = \frac{0,04^2}{9,8 \cdot 2 \cdot 0,002}$$

$$Fr = 0,041$$

Esto vuelve a indicar que la partícula “flota” y está inmersa en un fluido “extremadamente” viscoso. Ni las fuerzas gravitacionales, ni las de inercia son relevantes. La partícula “sigue” el movimiento del fluido.

## 1.5 Conducción - Convección - Radiación

Una placa infinita con conductividad térmica  $k$  se mantiene a una temperatura constante e igual a  $T_0$  en su cara correspondiente a  $x = 0$ , mientras que la cara correspondiente a  $x = L$  intercambia calor con un entorno cuya temperatura característica es constante e igual a  $T_2 \ll T_0$ .



Se pide:

1. Identificar un número adimensional que relacione la capacidad de transmitir (o la transmisión de) calor desde la placa por convección respecto a la capacidad de transmitir calor por conducción hacia el medio exterior. El coeficiente de película es  $h$ . Despreciar el calor que se pueda transferir por radiación.
2. ¿Qué parámetros hay que modificar para que  $(T_0 - T_1)$ , es decir, la diferencia de temperaturas en la placa, sea pequeña?
3. Identificar un número adimensional que relacione la capacidad de transmitir (o la transmisión de) calor desde la placa por radiación respecto a la capacidad de transmitir calor por conducción hacia el medio exterior. La emisividad es  $\epsilon$ .
4. ¿Qué parámetros hay que modificar para que  $(T_0 - T_1)$ , es decir, la diferencia de temperaturas en la placa sea pequeña?

### Apartado 1

El flujo de calor por unidad de superficie transmitido por conducción a través de la placa es, de acuerdo con la ley de Fourier:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{k}{L} \cdot (T_0 - T_1)$$

El flujo de calor por unidad de superficie transmitido por convección entre la pared y el fluido que la rodea es de acuerdo con la ley de Newton:

$$\frac{\dot{q}}{A} = h \cdot (T_1 - T_2)$$

Los dos flujos de calor deben ser iguales debido a que se desprecia la radiación, por tanto, igualando las ecuaciones obtenidas.

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{k}{L} \cdot (T_0 - T_1) = h \cdot (T_1 - T_2)$$

De la ecuación anterior se puede escribir:

$$\frac{h}{k/L} = \frac{(T_0 - T_1)}{(T_1 - T_2)}$$

Donde el parámetro adimensional representa:

$$\frac{h}{k/L} = \frac{\text{Coef. trans. de calor por convección}}{\text{Coef. trans. de calor por conducción}}$$

$$\frac{L/k}{1/h} = \frac{\text{Resistencia de conducción}}{\text{Resistencia de convección}}$$

El número adimensional así definido se denomina número de Biot.

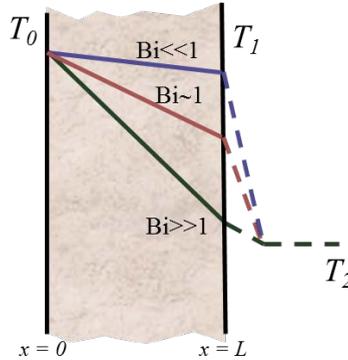
$$\text{Bi} = \frac{h \cdot L}{k}$$

## Apartado 2

Si el número de Biot es pequeño ( $\text{Bi} \rightarrow 0$ ),  $h$  es mucho más baja que  $k/L$ , por lo tanto la dificultad para transmitir calor está en la convección,  $T_0 \sim T_1$  y el salto térmico más alto aparece entre la pared y el fluido.

Si el número de Biot es grande ( $\text{Bi} \rightarrow \infty$ ),  $k/L$  es mucho más bajo que  $h$ , la dificultad para transmitir calor está en la conducción por lo tanto  $T_1 \sim T_2$  y el salto térmico está en la pared.

En la figura 1.5.1 se han representado de forma esquemática los saltos de temperatura en la pared y el fluido para tres casos valores diferentes del número de Biot.



**Figura 1.5.1:** Salto térmico en la pared y en el fluido en función del número de Biot.

Por tanto si lo que se busca es un gradiente de temperatura reducido dentro de la pared hay que disminuir el número de Biot y ésto se puede lograr:

- Reduciendo el espesor de la pared  $L$  y el coeficiente de película  $h$ .
- Aumentando la conductividad térmica de la pared  $k$ .

### Apartado 3

Haciendo el mismo razonamiento que en el apartado 1, el flujo de calor por unidad de superficie transmitido por conducción a través de la placa es el calculado mediante la ley de Fourier:

$$\frac{\dot{q}}{A} = \frac{k}{L} \cdot (T_0 - T_1)$$

El flujo de calor neto por unidad de superficie transmitido por radiación es el que define la ley de Stefan-Boltzman:

$$\frac{\dot{q}^*}{A} = \sigma \cdot \epsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

En este caso los dos flujos de calor no pueden considerarse iguales debido a que existe un flujo de calor por convección hacia el fluido.

Lo que se puede hacer es estimar el efecto de estos términos adicionales. Haciendo el cociente entre ambos se obtiene:

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}^*} = \frac{k/L \cdot (T_0 - T_1)}{\sigma \cdot \epsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)}$$

Si el cociente es próximo a 1 significa que el resto de mecanismos de transmisión no son relevantes, concretamente la convección, sin embargo, si el cociente es  $\neq 1$  la convección entre el medio y la placa es importante.

Multiplicando y dividiendo la ecuación anterior por  $T_1^4$  y operando convenientemente se obtiene:

$$\frac{\dot{q}}{\dot{q}^*} = \frac{k/L}{\sigma \cdot \epsilon \cdot T_1^3} \cdot \frac{\frac{T_0}{T_1} - 1}{1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4}$$

En la ecuación anterior se identifica el número de Planck que relaciona el calor transmitido por conducción respecto al que se transmite por radiación.

$$\text{Planck} = \frac{k/L}{\sigma \cdot \epsilon \cdot T_1^3} = \frac{\text{Coef. trans. de calor por conducción}}{\text{Coef. trans. de calor por radiación}}$$

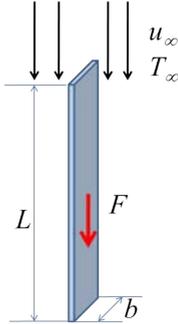
Donde  $T_1$  es una temperatura característica del sistema, en concreto, la de la pared exterior.

#### Apartado 4

Para que el gradiente de temperatura en la placa sea reducido y asumiendo que el efecto de la convección es despreciable en este problema, es claro que habría que incrementar el parámetro  $k/L$  respecto del parámetro  $\sigma \cdot \epsilon$ , lo que por lo tanto, para un valor dado de flujo de calor, se logra incrementando  $k$  y disminuyendo  $L$ .

## 1.6 Placa plana inmersa en una corriente de aire

Una placa plana de longitud  $L$  y ancho  $b$  está suspendida e inmersa en un flujo de aire paralelo a sus dos superficies como se muestra en la figura. La temperatura y la velocidad del aire son  $T_\infty$  y  $u_\infty$  respectivamente. La temperatura de la placa  $T_p$  se mantiene constante. La fuerza total de resistencia fluidodinámica que actúa sobre la placa es  $F$ .



Las propiedades del aire son:

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 1 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$\text{Pr} = 0,7$$

$$\nu = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Se pide:

1. Suponiendo que el flujo es turbulento, el coeficiente de pérdidas  $C_f$  y la resistencia fluidodinámica se pueden relacionar como:

$$F = C_f \cdot A_s \cdot \frac{\rho \cdot u_\infty^2}{2}$$

Siendo  $A_s = 2 \cdot L \cdot b$

Demostrar que, aceptando la analogía de Reynolds, el coeficiente de película se puede calcular como:

$$h = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{F \cdot C_p}{u_\infty} \cdot \frac{1}{A_s}$$

2. Siendo  $L = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$  y  $u_\infty = 5 \text{ m/s}$  determinar el número de Reynolds ( $\text{Re}_L$ ).
3. Suponiendo que  $F = 0,95 \text{ N}$  determinar los valores de  $h$  y del número de Nusselt ( $\text{Nu}_e$ ) experimentales.
4. A partir de una correlación empírica obtener el número de Nusselt ( $\text{Nu}_c$ ) y compararlo con el obtenido en el apartado anterior.

5. ¿Existe alguna razón teórica para explicar la diferencia encontrada entre  $Nu_e$  y  $Nu_c$  al margen de las incertidumbres de medida experimentales?

### Apartado 1

A partir de la ecuación dada en el enunciado se puede escribir que:

$$F = C_f \cdot A_s \cdot \frac{\rho \cdot u_\infty^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{2 \cdot F}{A_s \cdot \rho \cdot u_\infty^2}$$

Aceptando como válida la analogía de Reynolds el coeficiente de pérdidas  $C_f$  se puede expresar como:

$$Nu = C_f \cdot \frac{Re_L}{2} \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{2 \cdot Nu}{Re_L}$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene:

$$Nu = Re_L \cdot \frac{F}{A_s \cdot \rho \cdot u_\infty^2}$$

A partir de las definiciones del número de Nusselt y el de Reynolds, la ecuación anterior queda como:

$$\frac{h \cdot L}{k} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu} \cdot \frac{F}{A_s \cdot \rho \cdot u_\infty^2}$$

$$h = \frac{k \cdot F}{A_s \cdot \nu \cdot \rho \cdot u_\infty}$$

A partir de la definición del número de Prandtl se puede obtener:

$$Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{k} = \frac{C_p \cdot \nu \cdot \rho}{k} \quad \Rightarrow \quad \nu = Pr \cdot \frac{k}{C_p \cdot \rho}$$

Reemplazando en la ecuación obtenida para  $h$ , se obtiene finalmente:

$$h = \frac{k \cdot F}{A_s \cdot \rho \cdot u_\infty} \cdot \frac{1}{Pr} \cdot \frac{C_p \cdot \rho}{k}$$

Organizando los términos se puede escribir:

$$h = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{F \cdot Cp}{u_\infty} \cdot \frac{1}{A_s}$$

## Apartado 2

El número de Reynolds,  $\text{Re}_L$ , se obtiene como:

$$\text{Re}_L = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{5 \cdot 3}{1,5 \cdot 10^{-6}}$$

$$\text{Re}_L = 10^7$$

## Apartado 3

Si la fuerza obtenida en el ensayo experimental es  $F = 0,95$  N, reemplazando valores se obtiene:

$$h = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \frac{F \cdot Cp}{u_\infty} \cdot \frac{1}{A_s} = \frac{1}{0,7} \cdot \frac{0,95 \cdot 1000}{10} \cdot \frac{1}{2 \cdot (2 \cdot 3)}$$

$$h = 22,62 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Para hallar el valor del número de Nusselt experimental,  $\text{Nu}_e$ , primero debemos hallar el valor de  $k$ .

$$k = \frac{1}{\text{Pr}} \cdot \nu \cdot Cp \cdot \rho = \frac{1}{0,7} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 1,2$$

$$k = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

El número de Nusselt experimental es:

$$\text{Nu}_e = \frac{h \cdot L}{k} = \frac{22,62 \cdot 3}{2,57 \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{Nu}_e = 26403,5$$

#### Apartado 4

Teniendo en cuenta que el número de Reynolds es mayor que  $5 \cdot 10^5$  podemos asegurar que estamos en condiciones turbulentas, por lo tanto, una correlación a utilizar puede ser:

$$\overline{Nu}_c = 0,037 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_c = 0,037 \cdot (10^7)^{0,8} \cdot (0,7)^{1/3} = 13078,8$$

Sin embargo, para el caso en que no se pueda asegurar que la placa sea lo suficientemente larga para desprestigiar la región inicial de flujo laminar, la correlación empírica a utilizar puede ser:

$$\overline{Nu}_c = (0,037 \cdot Re_L^{0,8} - 871) \cdot Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_c = (0,037 \cdot (10^7)^{0,8} - 871) \cdot (0,7)^{1/3} = 12305,4$$

Como puede observarse ambas correlaciones dan valores del mismo orden de magnitud para el número de Nusselt.

#### Apartado 5

Si se hace el cociente entre ambos números de Nusselt, el experimental y el obtenido a partir de las correlaciones se obtiene:

$$\frac{\overline{Nu}_e}{\overline{Nu}_c} = \frac{26403,5}{12305,4} = 2$$

Es decir el número de Nusselt experimental es el doble que el obtenido por medio de la correlación. Esto se debe a que en el experimento realizado para este problema el flujo de aire circula por ambas caras de la placa y en las correlaciones solo se supone que el flujo de aire circula por una de las caras de la placa. Así el factor 2 se debe a que el área en este caso es el doble.

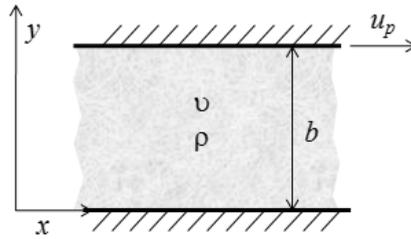
## Capítulo 2

# Transferencia de energía con campo de velocidad



## 2.1 Campo de velocidades entre dos placas

La figura esquematiza dos placas metálicas de profundidad infinitas. La inferior está en reposo, mientras que la superior desliza con una velocidad relativa  $u_p$  respecto de la placa inferior sobre un fluido lubricante que tiene una densidad  $\rho$  y una viscosidad cinemática  $\nu$  constantes. Se supone que no hay ningún gradiente de presión en la dirección  $x$  y la distancia entre las dos placas es constante e igual a  $b$ , y se estima que el flujo es laminar. Suponemos que el movimiento es unidimensional, es decir, que  $u_y = u_z = 0$ .



Suponiendo flujo estacionario se pide:

1. Obtener una expresión para el campo de velocidades  $u_x(y)$ .
2. Determinar el valor del esfuerzo cortante  $\tau_x(y)$  a partir de la ley de Stokes.
3. Si definimos el número de Reynolds característico como:

$$\overline{\text{Re}} = \frac{u \cdot D_h}{\nu}$$

Donde  $D_h$  es el diámetro hidráulico equivalente de la sección, y el coeficiente de fricción se define como:

$$f = 4 \cdot \frac{|\tau_x|}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}^2}$$

Demostrar que:

$$f = \frac{32}{\overline{\text{Re}}}$$

### Apartado 1

Por la condición de no deslizamiento en los contornos superior e inferior del volumen de control,  $u_x(0) = 0$  y  $u_x(b) = u_p$ . Teniendo en cuenta que el flujo es unidimensional  $u_y = u_z = 0$ .

Puesto que estamos en un proceso estacionario, la densidad del fluido es constante (flujo incompresible) y el espesor entre placas es constante e igual a  $b$ ,  $u_x = f(y)$ , es decir no hay gradientes de  $u_x$  en sentido  $x$ .

Esta situación de flujo se la conoce como flujo de Couette y viene representada por:

$$\mu \cdot \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0$$

La formulación anterior se obtiene planteando que la  $\sum \vec{F}_x = 0$ , es decir, que la suma de fuerzas que actúa sobre el sistema debe ser nula por no existir variación de la cantidad de movimiento en sentido  $x$ . En este problema la única fuerza que actúa es la correspondiente a los esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad.

Integrando la ecuación anterior dos veces se obtiene:

$$\frac{du_x}{dy} = C_1 \quad \Rightarrow \quad u_x = C_1 \cdot y + C_2$$

Imponiendo las condiciones de contorno definidas se llega a:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad u_x = 0 & \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ y = b \quad u_x = u_p & \quad \Rightarrow \quad C_1 = u_p/b \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de las constantes de integración se obtiene:

$$u_x = u_p \cdot \frac{y}{b}$$

## Apartado 2

El esfuerzo cortante se puede determinar a partir de la ley de Stokes o ley de viscosidad de Newton.

$$\tau_x = -\mu \cdot \frac{du_x}{dy} = -\mu \cdot \frac{u_p}{b}$$

Por lo tanto para esta situación de flujo el esfuerzo cortante es constante a lo largo de una sección transversal e independiente de  $y$ . El signo negativo indica que se opone al movimiento.

## Apartado 3

El diámetro hidráulico se define como:  $D_h = 4 \cdot A/P$ , siendo  $A$  el área transversal y  $P$  el perímetro mojado.

Con esta definición de  $D_h$  se asegura que para una sección circular el diámetro hidráulico coincide con el geométrico. Para este caso y considerando que la dimensión perpendicular al plano  $xy$  tiene un valor  $z$ , el diámetro hidráulico es:

$$D_h = \frac{4 \cdot b \cdot z}{2 \cdot (b + z)}$$

Cuando  $z \gg b$  el diámetro hidráulico es:  $D_h = 2 \cdot b$

Como la distribución de velocidad es lineal con  $y$ , el valor de la velocidad media entre las placas  $\bar{u}$ , vale  $u_p/2$ , por lo tanto, el coeficiente de fricción se puede escribir como:

$$f = 4 \cdot \frac{|\tau_x|}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}^2} = 4 \cdot \frac{|\tau_x|}{0,5 \cdot \rho \cdot (u_p/2)^2}$$

Remplazando el valor del esfuerzo cortante obtenido en el apartado 2.

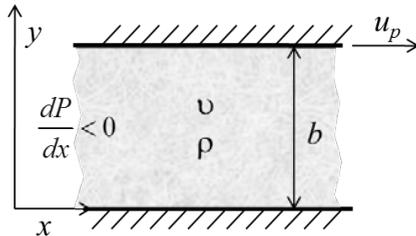
$$f = 4 \cdot \frac{\mu \cdot u_p/b}{0,5 \cdot \rho \cdot (u_p/2)^2} = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot u_p \cdot b}$$

$$f = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot u_p \cdot b} \cdot \frac{2}{2} = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot (u_p/2) \cdot (2 \cdot b)}$$

$$f = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot \bar{u} \cdot D_h} = \frac{32}{\text{Re}}$$

## 2.2 Campo de velocidades entre dos placas con gradiente de presión

La figura esquematiza dos piezas metálicas. La inferior está en reposo mientras que la superior desliza con una velocidad relativa  $u_p$  respecto de la placa inferior sobre un fluido lubricante que tiene una densidad  $\rho$  y una viscosidad cinemática  $\nu$  constantes. La distancia entre las dos placas es constante e igual a  $b$ , y se estima que el flujo es laminar. El fluido lubricante está sometido a régimen de lubricación forzada, de tal forma que existe un gradiente de presión constante en la dirección  $x$  ( $dP/dx < 0$ ). Suponemos que las placas son infinitas en la dirección  $z$  y que  $u_y = u_z = 0$ .



Suponiendo flujo estacionario se pide:

1. Obtener una expresión para el campo de velocidades  $u_x(y)$ .
2. Determinar el esfuerzo cortante en la pared ( $\tau_x$ ) y el coeficiente de fricción ( $f$ ) considerando el deslizamiento y el gradiente de presiones de forma independiente.
3. Determinar el coeficiente de fricción total definido como:

$$f_T = 4 \cdot \frac{|\tau_{xT}|}{0,5 \cdot \rho \cdot (\bar{u}_{p0} + u_p/2)^2}$$

Siendo  $\bar{u}_{p0}$  la velocidad media del flujo debido al gradiente de presiones.

### Apartado 1

A partir de la ecuación de continuidad, y dado que la densidad es constante y el flujo es estacionario,  $u_x$  solo puede depender de  $y$ , es decir,  $u_x = u_x(y)$ .

Si se plantea la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección  $x$  para flujo incompresible estacionario se obtiene:

$$\rho \cdot u_x \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \cdot \nu \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_x) = -\frac{dP}{dx}$$

El balance de flujos de cantidad de movimiento, primer término de la ecuación, en el volumen de control es nulo debido a que la velocidad es uniforme en  $x$  (ya que  $u_x$  sólo es función de  $y$ , y que  $u_y$  y  $u_z$  son nulos).

$$\rho \cdot u_x \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

Teniendo en cuenta que solo hay esfuerzo cortante debido a  $du_x/dy$ , el segundo término de la ecuación se puede escribir como:

$$\rho \cdot \nu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

Por lo tanto la ecuación resultante queda como:

$$-\mu \cdot \frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\frac{dP}{dx}$$

De la ecuación anterior se desprende que las fuerzas debidas a los esfuerzos viscosos, término de la izquierda, se cancelan con las fuerzas de fricción debidas al gradiente de presión.

Integrando dos veces la ecuación anterior se obtiene:

$$\mu \cdot \frac{du_x}{dy} = \frac{dP}{dx} \cdot y + C_1 \quad \Rightarrow \quad \mu \cdot u_x = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y = 0 & \rightarrow u_x = 0 \\ y = b & \rightarrow u_x = u_p \end{aligned}$$

Se pueden obtener los valores de las constantes de integración.

$$C_2 = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = \frac{1}{b} \cdot \left( \mu \cdot u_p - \frac{dP}{dx} \cdot \frac{b^2}{2} \right)$$

Reemplazando los valores de las constantes se obtiene una expresión del campo de velocidades  $u_x(y)$ :

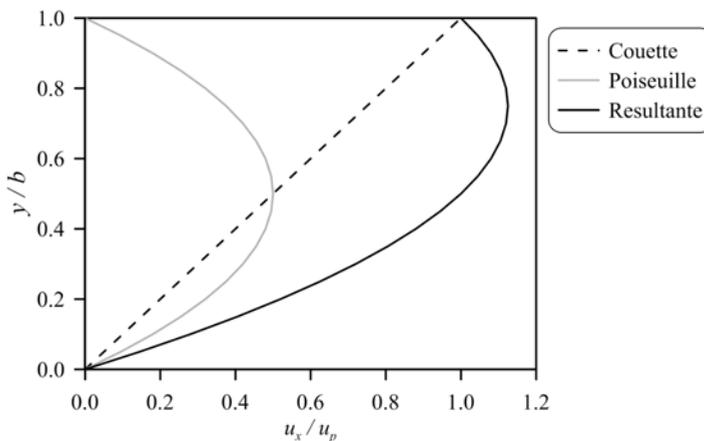
$$u_x = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{y^2}{2 \cdot \mu} + \frac{y}{b} \cdot \left( u_p - \frac{dP}{dx} \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \right)$$

Normalizando la ecuación respecto a la velocidad  $u_p$  y operando convenientemente se obtiene:

$$\frac{u_x}{u_p} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{y^2}{2 \cdot \mu \cdot u_p} + \frac{y}{b} - \frac{y}{b} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \mu \cdot u_p}$$

$$\frac{u_x}{u_p} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2 \cdot \mu \cdot u_p} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

La ecuación anterior tiene dos términos que afectan al campo de velocidad: el primero ( $y/b$ ) es el debido al deslizamiento entre placas (flujo de Couette) y el segundo debido al gradiente de presión (flujo de Poiseuille).



**Figura 2.2.1:** Campo de de velocidades resultante. (Couette + Poiseuille)

Para este problema en particular, en el que el gradiente de presión es negativo en la dirección de la velocidad de la placa, el campo de velocidades resultante se

puede obtener sumando ambos términos y se puede representar gráficamente como se ve en la figura 2.2.1.

Los valores máximos y medios de la velocidad son:

- Para el flujo de Couette:

$$\begin{aligned} u_{max\_C} &= u_p & \text{para } y = b \\ \bar{u}_C &= u_p/2 & \text{para } y = b/2 \end{aligned}$$

- Para el flujo de Poiseuille:

$$\begin{aligned} u_{max\_Po} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{\mu} \cdot \left| \frac{dP}{dx} \right| & \text{para } y = b/2 \\ \bar{u}_{Po} &= \frac{2}{3} \cdot u_{max} & \text{se obtiene integrando} \end{aligned}$$

De las expresiones obtenidas se puede expresar el gradiente de presiones como:

$$\frac{dP}{dx} = 8 \cdot u_{max\_Po} \cdot \mu \cdot \frac{1}{b^2} = 12 \cdot \bar{u}_{Po} \cdot \mu \cdot \frac{1}{b^2}$$

Por tanto el gradiente de presión que hay que asegurar para mantener el flujo de aceite es lineal con la velocidad característica de Poiseuille y con la viscosidad, y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las placas.

Reemplazando en la expresión del campo de velocidades se obtiene:

$$\frac{u_x}{u_p} = \frac{y}{b} + \frac{6 \cdot \bar{u}_{Po}}{u_p} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Cuando  $\bar{u}_{Po}/u_p \gg 1$  el flujo está dominado por el gradiente de presión  $dP/dx$  y cuando  $\bar{u}_{Po}/u_p \ll 1$  el flujo está dominado por el flujo de Couette.

## Apartado 2

Para el flujo de Couette, el esfuerzo cortante es constante e independiente de  $y$ .

$$\tau_{x\_C} = \mu \cdot \frac{du_x}{dy} = \mu \cdot \frac{u_p}{b}$$

El signo será positivo para la placa inferior y negativo para la placa superior puesto que el cortante se opone al movimiento relativo entre placa y fluido.

El coeficiente de fricción tiene el valor de:

$$f_c = 4 \cdot \frac{\tau_{x\_C}}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}_C^2} = 8 \cdot \frac{\mu \cdot u_p/b}{\rho \cdot (u_p/2)^2}$$

$$f_c = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot u_p \cdot b} = 32 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot \bar{u}_C \cdot D_h}$$

$$f_c = \frac{32}{\text{Re}}$$

Siendo  $\overline{\text{Re}} = \bar{u}_C \cdot D_h/\nu$

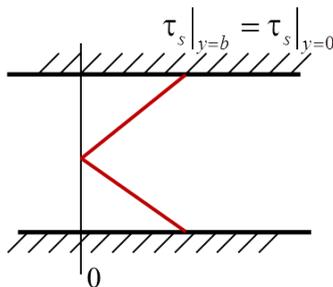
Para el flujo de Poiseuille, el esfuerzo cortante es:

$$\tau_{x\_Po} = \mu \cdot \frac{du_x}{dy} = \mu \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \left( \frac{1}{b} - \frac{2 \cdot y}{b^2} \right)$$

El esfuerzo cortante para  $y = 0$  se puede escribir como:

$$\tau_{x\_Po}|_{y=0} = \frac{b}{2} \cdot \frac{dP}{dx} = 4 \cdot \frac{u_{max\_Po} \cdot \mu}{b} = 6 \cdot \frac{\bar{u}_{Po} \cdot \mu}{b}$$

Para  $y = b/2$  el esfuerzo cortante es igual a cero y para  $y = b$  tiene el mismo valor y sentido que para  $y = 0$ , tal como se muestra en la figura 2.2.2.



**Figura 2.2.2:** Representación del esfuerzo cortante entre las placas.

El coeficiente de fricción para el flujo de Poiseuille se puede escribir como:

$$f_{Po} = \frac{\Delta P}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}_{Po}^2} \cdot \frac{D_h}{L} = \frac{dP/dx}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}_{Po}^2} \cdot D_h$$

$$f_{Po} = \frac{2 \cdot b}{0,5 \cdot \rho \cdot \bar{u}_{Po}^2} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{4 \cdot b}{\rho \cdot \bar{u}_{Po}^2} \cdot \frac{12 \cdot \bar{u}_{Po} \cdot \mu}{b^2}$$

$$f_{Po} = 48 \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot \bar{u}_{Po} \cdot b} = \frac{48}{\text{Re}} = \frac{96}{\text{Re}^*}$$

Siendo  $\overline{\text{Re}} = \bar{u}_{Po} \cdot b/\nu$  y  $\overline{\text{Re}}^* = \bar{u}_{Po} \cdot D_h/\nu$

### Apartado 3

El coeficiente de fricción total para la placa inferior se define como:

$$f_T = 4 \cdot \frac{\tau_{xT}}{0,5 \cdot \rho \cdot (\bar{u}_{Po} + u_p/2)^2}$$

Reemplazando el valor del esfuerzo cortante por la suma de los esfuerzos cortantes calculados en el apartado anterior.

$$f_T = 4 \cdot \frac{(\mu \cdot u_p/b) + (6 \cdot \bar{u}_{Po} \cdot \mu/b)}{0,5 \cdot \rho \cdot (\bar{u}_{Po} + u_p/2)^2}$$

Operando se obtiene:

$$f_T = 32 \cdot \frac{\mu}{b \cdot \rho} \cdot \left[ \frac{0,5}{\bar{u}_{Po} + u_p/2} + \frac{\bar{u}_{Po}}{(\bar{u}_{Po} + u_p/2)^2} \right]$$

Expresión que se reduce a las obtenidas en el apartado anterior cuando solo hay flujo de Couette ( $\bar{u}_{Po} = 0$ ) o de Poiseuille ( $u_p = 0$ ).

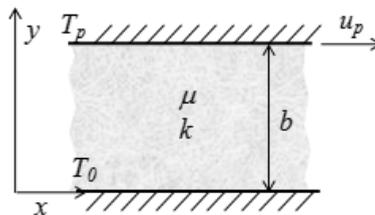
Para la placa superior el esfuerzo cortante es:

$$\tau_{xT} = -\mu \cdot \frac{u_p}{b} + 6 \cdot \frac{\bar{u}_{Po} \cdot \mu}{b}$$

Como se desprende de la ecuación anterior el esfuerzo cortante se anula cuando  $\bar{u}_{Po} = u_p/6$ .

## 2.3 Campo de velocidades y temperatura entre dos placas

La figura esquematiza dos piezas metálicas. La inferior está en reposo, mientras que la superior desliza con una velocidad relativa  $u_p$  respecto de la placa inferior sobre un fluido lubricante que tiene una densidad  $\rho$  y una viscosidad cinemática  $\nu$  constantes. La distancia entre las dos placas es constante e igual a  $b$  y se estima que el flujo es laminar. La placa inferior está a una temperatura  $T_0$  y la superior a una  $T_p$  mayor que  $T_0$ . Suponemos que las placas son infinitas en la dirección  $z$  y que  $u_y = u_z = 0$ .



Suponiendo flujo estacionario, se pide:

1. Determinar el campo de temperaturas en el fluido entre las placas.
2. Identificar un parámetro adimensional que relacione el calor generado por disipación viscosa con el calor debido a la diferencia de temperaturas.
3. Realizar un estudio paramétrico de la influencia de este parámetro adimensional. Identificar el lugar donde el fluido alcanza la temperatura máxima.
4. Plantear la ecuación que permita calcular los flujos de calor hacia cada placa.
5. Cuantificar el problema si se supone que el lubricante tiene una viscosidad  $\mu = 0,9 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  y una conductividad térmica  $k = 0,15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ . Siendo el rango de velocidades entre 1 y 10 m/s y la diferencia de temperaturas entre placas 10 a  $60^\circ\text{C}$ .

**Nota:** Considerar que el campo de velocidades es el correspondiente a un flujo de Couette ( $u_x = u_p \cdot y/b$ ) y que la función disipación de la ecuación de la energía queda como:

$$\Phi = \mu \cdot \left(\frac{u_p}{b}\right)^2$$

### Apartado 1

Se parte de la ecuación de la energía de forma general:

$$\rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \cdot C_p \cdot \text{div}(\vec{u} \cdot T) - \rho \cdot C_p \cdot \alpha \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) = T.F.$$

En condiciones estacionarias, flujo incompresible y particularizando para este problema, la ecuación anterior se reduce a:

$$-\frac{\partial T}{\partial y} \cdot \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \Phi = \mu \cdot \left( \frac{u_p}{b} \right)^2$$

Integrando dos veces la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{\mu}{k} \cdot \left( \frac{u_p}{b} \right)^2 \cdot y + C_1 \\ T(y) &= -\frac{\mu}{k} \cdot \left( \frac{u_p}{b} \right)^2 \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2 \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno se puede hallar el valor de las constantes de integración.

$$\begin{aligned} y = 0 &\quad \rightarrow \quad T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_0 \\ y = b &\quad \rightarrow \quad T(b) = T_p \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{T_p - T_0}{b} + \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot k \cdot b} \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de las constantes en la ecuación se puede obtener el campo de temperaturas.

$$T(y) = -\frac{\mu}{k} \cdot \left( \frac{u_p}{b} \right)^2 \cdot y^2 + \left( \frac{T_p - T_0}{b} + \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot k \cdot b} \right) \cdot y + T_0$$

Operando convenientemente se obtiene:

$$T(y) - T_0 = \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot k} + (T_p - T_0) \cdot \frac{y}{b}$$

La ecuación obtenida para el campo de temperatura está formada por dos términos: el primero es una función parabólica debida a un término fuente interno

(causado por la disipación viscosa) y el segundo la solución lineal a un problema de conducción (ley de Fourier).

La ecuación del campo de temperatura se puede expresar en forma adimensional como:

$$\theta(y) = \frac{T(y) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)} + \frac{y}{b}$$

Gráficamente, la ecuación del campo de temperatura, denominando  $A$  al término cuadrático y  $B$  al término lineal, se puede representar como se muestra en la figura 2.3.1

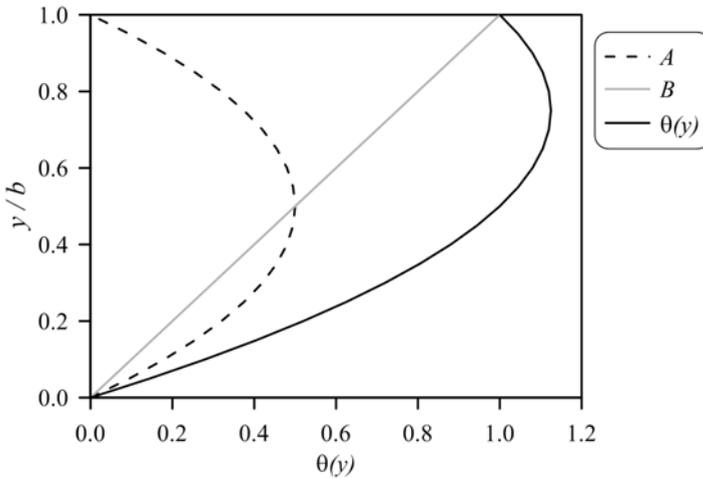


Figura 2.3.1: Campo de temperatura  $\theta(y)$ .

## Apartado 2

En la ecuación anterior aparece el siguiente parámetro adimensional:

$$\frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)}$$

El cual también se puede expresar como:

$$\frac{\mu \cdot (u_p/b) \cdot u_p}{(k/b) \cdot (T_p - T_0)} = \frac{\tau \cdot u_p}{(k/b) \cdot (T_p - T_0)}$$

Dicho parámetro representa la relación que existe entre el calor generado por la disipación viscosa producida por el rozamiento entre fluido que se mueve a diferentes velocidades y el calor debido a la conducción térmica entre las dos paredes a diferente temperaturas. Dicha relación adimensional se conoce como número de Brinkman.

$$\text{Br} = \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)}$$

### Apartado 3

Teniendo en cuenta la definición del número de Brinkman, la ecuación adimensional del campo de temperatura se puede escribir como:

$$\theta(y) = \frac{T(y) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \text{Br} + \frac{y}{b}$$

En la figura siguiente se ha representado como varía el perfil de temperatura para diferentes valores del número de Brinkman, partiendo de  $\text{Br} = 0$  que es el caso donde la distribución de temperatura corresponde a la distribución que se obtiene para un problema de conducción unidimensional entre dos placas a distinta temperatura (solución lineal). A medida que el número de Brinkman aumenta, el término cuadrático de la distribución de temperatura comienza a cobrar más importancia haciendo que la temperatura máxima que alcanza el fluido supere a la de la pared y haciendo que el lugar donde esta temperatura máxima se alcance sea más próxima a una distancia  $b/2$  (ver figura 2.3.2).

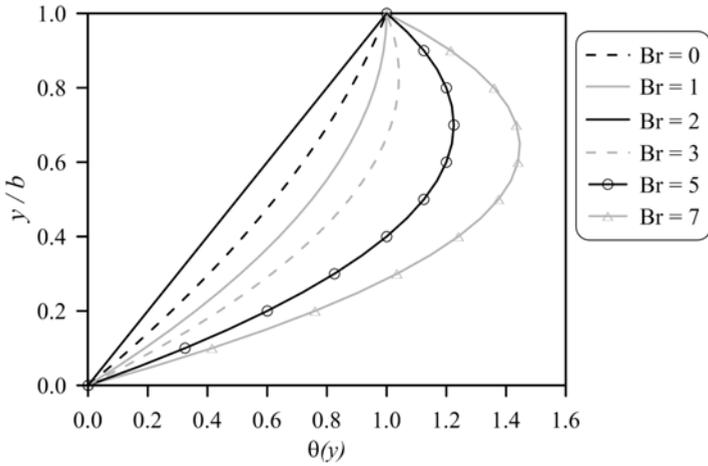
Para encontrar formalmente el punto donde la temperatura alcanza su máximo se debe derivar la ecuación del campo de temperatura e igualarla a cero.

$$T(y) = \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot k} + (T_p - T_0) \cdot \frac{y}{b} + T_0$$

$$\frac{dT(y)}{dy} = 0 = \left( \frac{1}{b} - \frac{2 \cdot y}{b^2} \right) \cdot \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot k} + (T_p - T_0) \cdot \frac{1}{b}$$

Resolviendo la ecuación para hallar el valor de  $y$  que hace máxima la temperatura se obtiene:

$$y_{max} = b \cdot \left( \frac{k \cdot (T_p - T_0)}{\mu \cdot u_p^2} + \frac{1}{2} \right)$$



**Figura 2.3.2:** Perfiles de temperatura  $\theta(y)$  considerando distintos valores del número de Brinkman.

$$y_{max} = b \cdot \left( \frac{1}{Br} + \frac{1}{2} \right)$$

De la ecuación anterior se puede concluir que para  $Br > 2$  la temperatura máxima se alcanza entre las placas y cada vez más próximo a  $b/2$  a medida que el número de Brinkman aumenta (tal como se observa en la figura anterior). Para  $Br \leq 2$  la temperatura máxima se alcanza en  $y = b$ , es decir, en la superficie de la placa superior.

#### Apartado 4

Conocido el campo de temperaturas se pueden determinar los flujos de calor por unidad de área intercambiados por el fluido con cada placa aplicando la ley de Fourier de la conducción.

Para la placa inferior (1):

$$\dot{q}_{p1} = -k \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot b} - \frac{k}{b} \cdot (T_p - T_0)$$

Para la placa superior (2):

$$\dot{q}_{p2} = -k \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=b} = \frac{\mu \cdot u_p^2}{2 \cdot b} - \frac{k}{b} \cdot (T_p - T_0)$$

## Apartado 5

Particularizando ahora el problema para un fluido lubricante con las siguientes propiedades:  $\mu = 0,9 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  y  $k = 0,15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  y reemplazando valores en la definición del número de Brinkman se obtiene:

$$\text{Br} = \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)} = \frac{0,9}{0,15} \cdot \frac{u_p^2}{(T_p - T_0)} = 6 \cdot \frac{u_p^2}{\Delta T}$$

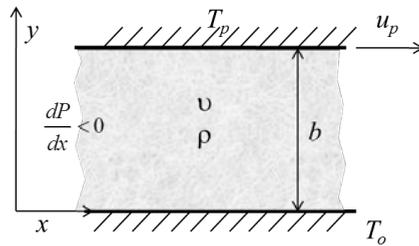
Si ahora suponemos los rangos de velocidades y temperaturas propuestos en el enunciado y se analizan los casos extremos se obtiene:

- Para  $u_p = 1 \text{ m/s}$  y  $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ , el número de Brinkman es  $\text{Br} = 0,1$
- Para  $u_p = 10 \text{ m/s}$  y  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ , el número de Brinkman es  $\text{Br} = 60$

Esto indica que para números de Brinkman bajos el flujo de calor está dominado por  $\Delta T$  y para números de Brinkman altos el flujo de calor está dominado por el calor generado por disipación viscosa.

## 2.4 Campo de velocidades y de temperaturas entre dos placas con gradiente de presión

La figura esquematiza dos piezas metálicas. La inferior está en reposo mientras que la superior desliza con una velocidad relativa  $u_p$  respecto de la placa inferior sobre un fluido lubricante que tiene una densidad  $\rho$ , una viscosidad cinemática  $\nu$ , una conductividad térmica  $k$  y un calor específico  $C_p$  constantes. La placa superior está a una temperatura  $T_p$  y la inferior a una temperatura  $T_0$  de tal forma que  $T_p > T_0$ . La distancia entre las dos placas es constante e igual a  $b$  y se estima que el flujo es laminar. El fluido lubricante está sometido a régimen de lubricación forzada de tal forma que existe un gradiente de presión constante en la dirección  $x$  ( $dP/dx < 0$ ). Se supone que las placas son infinitas en la dirección  $z$  y que  $u_y = u_z = 0$ .



Suponiendo flujo estacionario se pide:

1. Obtener la función de disipación  $\Phi$ , sabiendo que el campo de velocidades es el calculado en el problema 1.7.
2. Obtener el campo de temperatura  $T(y)$  en la película de aceite. Se puede suponer que  $dT/dx = dT/dz = 0$ .
  - a) Suponiendo  $\bar{u}_{Po} = 0$  (flujo dominado por Couette)
  - b) Suponiendo que  $6 \cdot \bar{u}_{Po}/u_p \gg 1$  (flujo dominado por Poiseuille)
3. Identificar el número de Brinkman para los dos casos anteriores.
4. Determinar una expresión del flujo de calor intercambiado entre ambas placas y el aceite.
5. Determinar la condición para que no exista intercambio de calor entre la placa superior y el aceite.
6. Determinar el valor de la temperatura media  $T_m$  del lubricante cuando domina el flujo de Poiseuille.

7. Para el mismo caso anterior determinar el coeficiente de película y el número de Nusselt entre el aceite y la placa superior, definido como:  $\dot{q}_p = h \cdot (T_m - T_p)$

### Apartado 1

La función disipación calcula la cantidad de calor por unidad de tiempo y de volumen que se genera por fricción viscosa.

$$\Phi = 2 \cdot \mu \cdot \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \cdot \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Particularizando a nuestro problema,  $u_y = u_z = 0$  y la velocidad  $u_x = u_x(y)$ , por lo tanto, la función disipación se reduce a:

$$\Phi = \mu \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2$$

El campo de velocidades es el que se obtuvo en el problema 1.7.

$$\frac{u_x}{u_p} = \frac{y}{b} + \frac{6 \cdot \bar{u}_{Po}}{u_p} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Derivando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{du_x}{dy} = u_p \cdot \left[ \frac{1}{b} + \frac{6 \cdot \bar{u}_{Po}}{u_p} \cdot \left( \frac{1}{b} - \frac{2 \cdot y}{b^2} \right) \right]$$

Por lo tanto la función disipación es:

$$\Phi = \frac{\mu \cdot u_p^2}{b^2} \cdot \left[ 1 + \frac{6 \cdot \bar{u}_{Po}}{u_p} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot y}{b} \right) \right]^2$$

Como caso particular de la función disipación se puede decir que:

- Cuando  $\bar{u}_{Po} \sim 0$ , es decir, flujo dominado por un flujo de Couette:

$$\Phi = \frac{\mu \cdot u_p^2}{b^2}$$

- Cuando  $6 \cdot \bar{u}_{Po}/u_p \gg 1$ , es decir, flujo dominado por un flujo de Poiseuille:

$$\Phi = 36 \cdot \mu \cdot \frac{\bar{u}_{Po}^2}{b^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot y}{b}\right)^2$$

## Apartado 2

Para determinar el campo de temperaturas en la película de aceite, planteamos la ecuación de la energía en forma diferencial. La ecuación se puede plantear de forma simplificada puesto que no hay término no estacionario, no hay ningún término convectivo, solo hay difusión térmica en la dirección  $y$ , no hay calor generado internamente por reacciones químicas. Por lo tanto:

$$-\rho \cdot C_p \cdot \operatorname{div} (\alpha \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = \Phi \quad \Rightarrow \quad -k \cdot \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2} = \Phi$$

Integrando dos veces la ecuación anterior.

$$k \cdot \frac{\partial T(y)}{\partial y} = - \int \Phi \cdot dy + C_1$$

$$k \cdot T(y) = - \int \left( \int \Phi \cdot dy \right) \cdot dy + C_1 \cdot y + C_2$$

Imponiendo las condiciones de contorno se puede obtener el valor de las constantes de integración:

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = k \cdot T_0$$

$$y = b \quad \rightarrow \quad T(b) = T_p \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{k \cdot (T_p - T_0)}{b} + \frac{1}{b} \cdot \iint \Phi|_{y=b}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$k \cdot T(y) = - \iint \Phi + \frac{y \cdot k \cdot (T_p - T_0)}{b} + \frac{y}{b} \cdot \iint \Phi|_{y=b} + k \cdot T_0$$

$$T(y) = T_0 + \frac{y \cdot (T_p - T_0)}{b} + \frac{y}{b \cdot k} \cdot \iint \Phi|_{y=b} - \frac{1}{k} \cdot \iint \Phi$$

Adimensionalizando la ecuación anterior se obtiene el campo de temperatura adimensional para el caso general.

$$\theta(y) = \frac{T(y) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{y}{b} + \frac{1}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left[ \frac{y}{b} \cdot \iint \Phi|_{y=b} - \iint \Phi \right]$$

En la ecuación obtenida se observan dos contribuciones al campo de temperaturas, la primera  $y/b$ , es un término lineal debido a la diferencia de temperaturas entre las placas y, el segundo, debido al calor generado por la disipación viscosa.

- a) Para el caso en que el fluido está dominado por Couette,  $\bar{u}_{Po} = 0$  donde la función disipación tiene el valor de:

$$\Phi = \frac{\mu \cdot u_p^2}{b^2}$$

Se puede obtener:

$$\iint \Phi = \frac{\mu \cdot u_p^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

$$\iint \Phi|_{y=b} = \frac{\mu \cdot u_p^2}{2} + C_1 \cdot b + C_2$$

Reemplazando en la ecuación del campo de temperatura y operando convenientemente se obtiene:

$$\theta(y) = \frac{y}{b} + \frac{1}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left( \frac{\mu \cdot u_p^2 \cdot y}{2 \cdot b} + \frac{y}{b} \cdot C_2 - \frac{\mu \cdot u_p^2 \cdot y^2}{2 \cdot b^2} - C_2 \right)$$

Como puede observarse la constante  $C_1$  ha desaparecido de la ecuación lo que significa que cualquier valor de  $C_1$  satisface la misma, en particular  $C_1 = 0$ . Aplicando las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y = 0 & \rightarrow \theta(0) = 0 & \rightarrow T(0) = T_0 \\ y = b & \rightarrow \theta(b) = 1 & \rightarrow T(b) = T_p \end{aligned}$$

Se obtiene que  $C_2 = 0$ , quedando finalmente:

$$\theta(y) = \frac{y}{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

El campo de temperaturas está formado por dos términos, el primero, debido a la diferencia de temperaturas entre las placas y el segundo debido a la disipación viscosa constante en  $y$ .

- b) Para el caso en que el fluido está dominado por Poiseuille,  $6 \cdot \bar{u}_{Po}/u_p \gg 1$  donde la función disipación tiene el valor de:

$$\Phi = 36 \cdot \mu \cdot \frac{\bar{u}_{Po}^2}{b^2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot y}{b}\right)^2$$

Integrando dos veces la función disipación, en la ecuación del campo de temperaturas y aplicando las mismas condiciones de contorno que en el apartado 2a), se llega a:

$$\theta(y) = \frac{y}{b} + 36 \cdot \frac{\mu \cdot \bar{u}_{Po}^2}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^4}{b^4}\right) \right]$$

Que es la ecuación del campo de temperaturas cuando el flujo está dominado por un flujo de Poiseuille y está formado por dos términos al igual que en el caso anterior, el primero, debido a la diferencia de temperaturas entre las placas y el segundo debido a la disipación viscosa, sólo que en este caso es cuadrática en  $y$ .

La ecuación general del campo de temperaturas cuando se consideran la disipación viscosa debida al flujo de Couette y de Poiseuille de forma conjunta se puede escribir como:

$$\theta(y) = \frac{y}{b} + \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left[ \frac{(1+A)^2}{2} \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{3} \cdot (A+A^2) \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3}\right) + \frac{A^2}{3} \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{y^4}{b^4}\right) \right]$$

Siendo:  $A = 6 \cdot \bar{u}_{Po}/u_p$

La ecuación general se puede reducir a las ecuaciones obtenidas en el apartado 2a) y 2b) cuando:

- Flujo de Couette:  $A \rightarrow 0$ .
- Flujo de Poiseuille:  $A^2 \gg A \gg 1$ .

### Apartado 3

El número de Brinkman aparece en las ecuaciones obtenidas en el apartado 2a) y 2b) definido de forma diferente en función de cuál es la velocidad predominante en el flujo.

Para el flujo dominado por Couette el número de Brinkman está definido como:

$$\text{Br} = \frac{\mu \cdot u_p^2}{k \cdot (T_p - T_0)}$$

Para el flujo dominado por Poiseuille el número de Brinkman está definido como:

$$\overline{\text{Br}} = \frac{\mu \cdot \overline{u}_{Po}^2}{k \cdot (T_p - T_0)}$$

Al número de Brinkman definido respecto a la velocidad medida del flujo de Poiseuille ( $\overline{u}_{Po}$ ), lo identificaremos con el símbolo  $\overline{\text{Br}}$  para diferenciarlo del definido respecto a la velocidad de la placa ( $u_p$ ).

### Apartado 4

Para determinar el flujo de calor intercambiado por el fluido lubricante con las paredes se plantea la ecuación de Fourier particularizada para  $y = 0$  e  $y = b$ .

$$\dot{q}_0 = -k \cdot \left. \frac{dT(y)}{dy} \right|_{y=0} \quad \text{y} \quad \dot{q}_p = -k \cdot \left. \frac{dT(y)}{dy} \right|_{y=b}$$

Derivando el campo de temperaturas obtenido en el apartado 2.

$$\frac{T(y) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{y}{b} + \text{Br} \cdot \left[ \frac{(1+A)^2}{2} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{2}{3} \cdot (A+A^2) \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3} \right) + \frac{A^2}{3} \cdot \left( \frac{y}{b} - \frac{y^4}{b^4} \right) \right]$$

$$\frac{dT(y)}{dy} = \frac{T_p - T_0}{b} + \frac{\text{Br} \cdot (T_p - T_0)}{b} \cdot \left[ \frac{(1+A)^2}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot y}{b} \right) - \frac{2}{3} \cdot (A+A^2) \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot y^2}{b^2} \right) + \frac{A^2}{3} \cdot \left( 1 - \frac{4 \cdot y^3}{b^3} \right) \right]$$

Para  $y = 0$

$$\left. \frac{dT(y)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{T_p - T_0}{b} + \frac{\text{Br} \cdot (T_p - T_0)}{b} \cdot \left[ \frac{(1+A)^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot (A + A^2) + \frac{A^2}{3} \right]$$

Para  $y = b$

$$\left. \frac{dT(y)}{dy} \right|_{y=b} = \frac{T_p - T_0}{b} + \frac{\text{Br} \cdot (T_p - T_0)}{b} \cdot \left[ -\frac{(1+A)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot (A + A^2) - A^2 \right]$$

Reemplazando el valor de las derivadas y operando se obtiene:

$$\dot{q}_0 = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot \left[ 1 + \text{Br} \cdot \left( \frac{(1+A)^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot (A + A^2) + \frac{A^2}{3} \right) \right]$$

$$\dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot \left[ 1 + \text{Br} \cdot \left( -\frac{(1+A)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot (A + A^2) - A^2 \right) \right]$$

De las ecuaciones para el flujo de calor entre las paredes y el fluido se desprende un caso particular cuando el número de Brinkman es igual a cero ( $u_p = 0$ ), en este caso los flujos de calor son iguales.

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b}$$

## Apartado 5

Para que no exista intercambio de calor entre la placa superior y el aceite, el flujo térmico debido a  $(T_p - T_0)$  se debe cancelar con el debido a la disipación viscosa.

$$\dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot \left[ 1 + \text{Br} \cdot \left( -\frac{(1+A)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot (A + A^2) - A^2 \right) \right] = 0$$

Para que esto suceda el número de Brinkman debe valer:

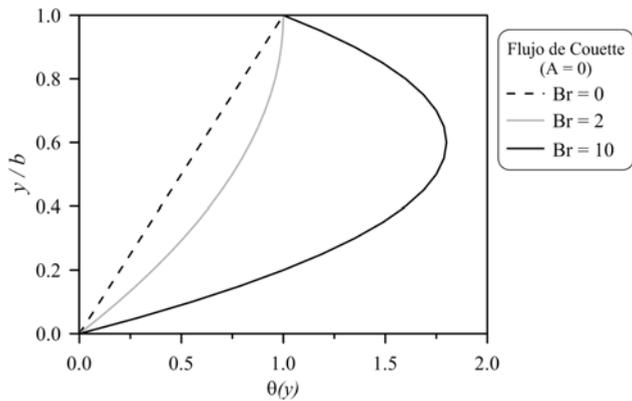
$$\text{Br} = \frac{1}{\left( \frac{(1+A)^2}{2} - \frac{4}{3} \cdot (A + A^2) + A^2 \right)}$$

Para el flujo dominado por Couette:  $A \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad Br = 2$

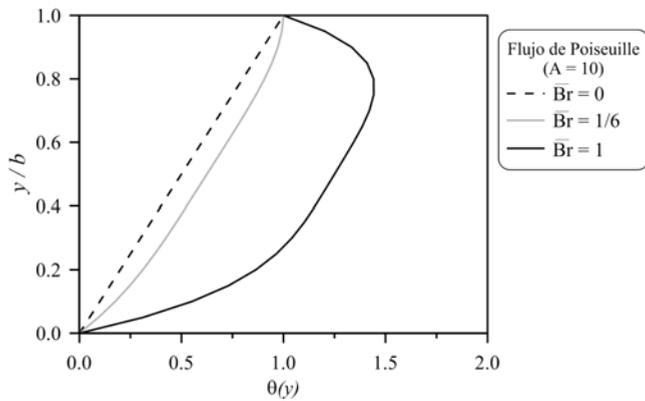
Para el flujo dominado por Poiseuille:  $A^2 \gg A \gg 1 \quad \Rightarrow \quad Br = 6/A^2$

Cuando  $Br > 2$  ( $\overline{Br} > 1/6$ ) el flujo térmico es hacia la pared y cuando  $Br < 2$  ( $\overline{Br} < 1/6$ ) el flujo térmico es hacia el aceite.

En las figura 2.4.1 a) y b) se puede ver, para ambos casos analizados, la distribución de temperatura en función del número de Brinkman.



(a)



(b)

**Figura 2.4.1:** a) Campo de temperatura cuando domina flujo de Couette. b) Campo de temperatura cuando domina flujo de Poiseuille.

## Apartado 6

La temperatura media de la película de aceite se define como:

$$T_m = \frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(y) \cdot dy$$

Operando, la ecuación del campo de temperaturas obtenida en el apartado 2b) se puede expresar como:

$$\theta(y) = \frac{y}{b} + 36 \cdot \frac{\mu \cdot \bar{u}_{Po}^2}{k \cdot (T_p - T_0)} \cdot \left[ \frac{1}{6} \cdot \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{b^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{b^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^4}{b^4} \right]$$

Despejando el valor de  $T(y)$  de la temperatura adimensional se obtiene:

$$T(y) = T_0 + (T_p - T_0) \cdot \frac{y}{b} + 36 \cdot \frac{\mu \cdot \bar{u}_{Po}^2}{k} \cdot \left[ \frac{1}{6} \cdot \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{b^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{b^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^4}{b^4} \right]$$

Reemplazando esta ecuación en la definición de la  $T_m$  e integrando se obtiene:

$$T_m = T_0 + \frac{1}{2} \cdot (T_p - T_0) + \frac{3}{5} \cdot \mu \cdot \bar{u}_{Po}^2$$

Operando convenientemente se puede obtener la expresión en función del número de Brinkman.

$$T_m = T_0 + (T_p - T_0) \cdot \left( \frac{1}{2} + \overline{\text{Br}} \cdot \frac{3}{5} \right)$$

También se puede expresar hallar la temperatura media adimensional.

$$\theta_m = \frac{T_m - T_0}{T_p - T_0} = \frac{1}{2} + \overline{\text{Br}} \cdot \frac{3}{5}$$

### Apartado 7

Para determinar el coeficiente de película se debe igualar el flujo de calor en la pared superior definido en el enunciado:

$$\dot{q}_p = h \cdot (T_m - T_p) = -h \cdot (T_p - T_m)$$

con el flujo de calor calculado en el apartado 4:

$$\dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot \left[ 1 + \text{Br} \cdot \left( -\frac{(1+A)^2}{2} + \frac{4}{3} \cdot (A + A^2) - A^2 \right) \right]$$

Caracterizando el flujo de calor obtenido en el apartado 4 para  $A \gg 1$ , se obtiene:

$$\dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot \left( 1 - \frac{1}{6} \cdot \text{Br} \cdot A^2 \right)$$

Reemplazando el valor de  $A = 6 \cdot \bar{u}_{Po}/u_p$  y teniendo en cuenta la relación existente entre Br y  $\overline{\text{Br}}$ , se obtiene:

$$\dot{q}_p = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot (1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}})$$

Igualando finalmente los flujos de calor, se obtiene:

$$\dot{q}_p = -h \cdot (T_p - T_m) = -k \cdot \frac{T_p - T_0}{b} \cdot (1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}})$$

Despejando de la ecuación anterior el coeficiente de película  $h$ .

$$h = \frac{k}{b} \cdot \frac{(T_p - T_0)}{(T_p - T_m)} \cdot (1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}})$$

Reemplazando el valor de  $T_m$  obtenido en el apartado 6.

$$h = \frac{k}{b} \cdot \frac{(T_p - T_0)}{T_p - T_0 + (T_p - T_0) \cdot \left( \frac{1}{2} + \overline{\text{Br}} \cdot \frac{3}{5} \right)} \cdot (1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}})$$

Operando se puede llegar a la siguiente expresión de  $h$ :

$$h = 2 \cdot \frac{k}{b} \cdot \left( \frac{1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}}}{1 - \frac{6}{5} \cdot \overline{\text{Br}}} \right)$$

El número de Nusselt es:

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot b}{k} = 2 \cdot \left( \frac{1 - 6 \cdot \overline{\text{Br}}}{1 - \frac{6}{5} \cdot \overline{\text{Br}}} \right)$$

De acuerdo al resultado obtenido se puede hacer el siguiente análisis:

- Para  $\overline{\text{Br}} = 0 \rightarrow \text{Nu} = 2$ , esto indica que todo el calor transmitido es por conducción debido al salto térmico entre las placas.
- Para  $\overline{\text{Br}} = \infty \rightarrow \text{Nu} = 10$ , esto indica que todo el calor transmitido es por conducción debido a la disipación viscosa.
- Para  $\overline{\text{Br}} = 1/6 \rightarrow \text{Nu} = 0$ , esto indica que no hay flujo de calor.
- Para  $\overline{\text{Br}} = 5/6$ , hay una aparente singularidad pero en realidad  $T_m = T_p$ , por tanto no puede haber flujo térmico entre la pared y el aceite.

## Capítulo 3

# Transferencia de calor: Conducción - convección



### 3.1 Ventana de una aeronave

Una ventana de una aeronave tiene un espesor de 8 mm y 0,4 m de alto por 0,3 m de ancho con una conductividad térmica de  $k_v = 0,78 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ . La temperatura interior del aire de la aeronave se mantiene constante e igual a  $T_i = 20^\circ\text{C}$ , mientras que la temperatura exterior es  $T_2 = -10^\circ\text{C}$ . Los coeficientes de película de transmisión de calor por convección entre la cara interior y exterior del vidrio y el aire son  $h_i = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y  $h_e = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , respectivamente.

Se pide:

1. Determinar la resistencia térmica total a través de la ventana ( $R_1$ ) entre el interior del avión y el exterior.
2. Determinar el flujo de calor hacia el exterior ( $\dot{q}_1$ ).
3. Determinar la temperatura interior ( $T_{11}$ ) y exterior ( $T_{12}$ ) de la ventana.

Consideramos ahora la posibilidad de utilizar una ventana formada por dos capas de 4 mm cada una separadas por una cámara de aire en reposo con un espesor de  $L_{ai} = 10 \text{ mm}$ . La conductividad del aire es de  $k_{ai} = 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ .

4. Determinar la nueva resistencia térmica total entre el interior del avión y el exterior ( $R_2$ ).
5. Determinar el flujo de calor hacia el exterior en estas condiciones ( $\dot{q}_2$ ). Comparar este resultado con el resultado obtenido en el apartado 2.
6. Determinar la temperatura de las dos caras de ambas capas (numerar de interior a exterior  $T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}$ ).
7. Comparar la temperatura de la cara interior de la capa interior ( $T_{21}$ ) con la obtenida en el apartado 3, ( $T_{11}$ ). ¿Qué ventajas tiene la doble capa respecto de la capa simple?
8. Estimar el cociente entre calores intercambiados por radiación entre un cuerpo a una temperatura de  $37^\circ\text{C}$  y las ventanas a  $T_{11}$  y  $T_{21}$ .

Consideramos ahora el caso de ventana de doble capa pero sin la hipótesis restrictiva de aire en reposo entre las dos capas de vidrio. La viscosidad cinemática del aire es de  $\mu = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y el número de Prandtl es  $\text{Pr} = 0,713$ .

9. Determinar el número de Nusselt del proceso de convección libre entre las dos capas, si utilizamos la correlación experimental:

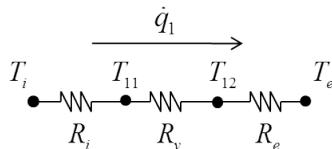
$$\text{Nu} = 0,42 \cdot \text{Ra}^{1/4} \cdot \text{Pr}^{0,012} \cdot (H/L)^{-0,3}$$

Siendo  $Ra$  el número de Rayleigh,  $H$  la dimensión característica de la ventana y  $L$  la separación entre placas.

- Determinar el flujo de calor ( $\dot{q}_3$ ) hacia el exterior si suponemos que se mantienen constantes las temperaturas de las caras internas y externas de la ventana determinadas en el apartado 6. Comparar el resultado con el obtenido en el apartado 5 y justificar su relación.

### Apartado 1

El esquema eléctrico equivalente para esta parte del problema se puede representar como:



La resistencia total es una la suma de las resistencia por convección exterior e interior más la resistencia por conducción a través del vidrio.

$$R_1 = R_i + R_v + R_e = \frac{1}{h_i \cdot A} + \frac{L_v}{k_v \cdot A} + \frac{1}{h_e \cdot A}$$

$$R_1 = \frac{1}{10 \cdot (0,4 \cdot 0,3)} + \frac{0,008}{0,78 \cdot (0,4 \cdot 0,3)} + \frac{1}{40 \cdot (0,4 \cdot 0,3)} = 1,127 \text{ K/W}$$

### Apartado 2

El flujo de calor hacia el exterior es proporcional al salto de temperatura e inversamente proporcional a la resistencia térmica.

$$\dot{q}_1 = \frac{T_i - T_e}{R_1} = \frac{(20 - (-10))}{1,127} = 26,61 \text{ W}$$

### Apartado 3

Para hallar las temperaturas de la pared del vidrio interior  $T_{11}$  y exterior  $T_{12}$ , se plantean la misma ecuación del apartado 2, pero aplicadas de forma parcial a cada una de los extremos del circuito eléctrico equivalente.

$$\dot{q}_1 = \frac{T_i - T_{11}}{R_i} \Rightarrow T_{11} = T_i - (\dot{q}_1 \cdot R_i)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{T_{12} - T_e}{R_e} \Rightarrow T_{12} = T_e + (\dot{q}_1 \cdot R_e)$$

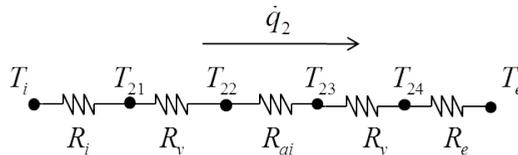
Reemplazando valores, se obtienen las temperaturas correspondientes

$$T_{11} = 20 - \left( 26,61 \cdot \frac{1}{10 \cdot 0,12} \right) = -2,18^\circ\text{C}$$

$$T_{12} = -10 + \left( 26,61 \cdot \frac{1}{40 \cdot 0,12} \right) = -4,46^\circ\text{C}$$

### Apartado 4

En el nuevo esquema eléctrico equivalente se tiene que tener en cuenta las resistencia por conducción del aire y la de los dos vidrios, además de las de convección interior y exterior como en el apartado 1.



$$R_2 = R_i + 2 \cdot R_v + R_{ai} + R_e = \frac{1}{h_i \cdot A} + 2 \cdot \frac{L_v}{k_v \cdot A} + \frac{L_{ai}}{k_{ai} \cdot A} + \frac{1}{h_e \cdot A}$$

$$R_2 = \frac{1}{10 \cdot 0,12} + 2 \cdot \frac{0,004}{0,78 \cdot 0,12} + \frac{0,01}{0,026 \cdot 0,12} + \frac{1}{40 \cdot 0,12} = 4,332 \text{ K/W}$$

### Apartado 5

De igual forma que en el apartado 2, se puede calcular el flujo de calor hacia el exterior como:

$$\dot{q}_2 = \frac{T_i - T_e}{R_2} = \frac{(20 - (-10))}{4,332} = 6,92 \text{ W}$$

Como puede el flujo de calor es del orden de la cuarta parte que el calculado en el apartado 2.

### Apartado 6

De igual forma que en el apartado 3, pero basándonos en el nuevo esquema eléctrico se pueden calcular las temperaturas intermedias de las dos paredes de vidrio.

Primero se calculan las temperaturas de la pared izquierda:

$$\dot{q}_2 = \frac{T_i - T_{21}}{R_{21}} \Rightarrow T_{21} = T_i - (\dot{q}_2 \cdot R_i)$$

$$T_{21} = 20 - \left( 6,92 \cdot \frac{1}{10 \cdot 0,12} \right) = 14,23^\circ\text{C}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{T_{21} - T_{22}}{R_{22}} \Rightarrow T_{22} = T_{21} + (\dot{q}_2 \cdot R_{22})$$

$$T_{22} = 14,2 - \left( 6,92 \cdot \frac{0,004}{0,78 \cdot 0,12} \right) = 13,93^\circ\text{C}$$

Ahora se calculan las temperaturas de la pared derecha:

$$\dot{q}_2 = \frac{T_{24} - T_e}{R_e} \Rightarrow T_{24} = T_e + (\dot{q}_2 \cdot R_e)$$

$$T_{24} = -10 + \left( 6,92 \cdot \frac{1}{40 \cdot 0,12} \right) = -8,55^\circ\text{C}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{T_{23} - T_{24}}{R_v} \Rightarrow T_{23} = T_{24} + (\dot{q}_2 \cdot R_v)$$

$$T_{23} = -8,55 + \left( 6,92 \cdot \frac{0,004}{0,78 \cdot 0,12} \right) = -8,26^\circ\text{C}$$

### Apartado 7

Existe una diferencia de temperaturas de  $16,4^\circ\text{C}$  ( $-2,18^\circ\text{C}$  y  $14,2^\circ\text{C}$ ) entre las dos configuraciones.

Entre las ventajas, la doble capa es más eficiente, pues con la misma cantidad de vidrio (mismo peso transportado en la aeronave) se consigue una mejor climatización. Además como la temperatura es más alta el calor intercambiado por radiación entre una persona y la ventana es más bajo, como se demostrará en el apartado siguiente.

### Apartado 8

El calor intercambiado por radiación entre dos cuerpos (uno gris y otro negro) se puede calcular como:

$$\dot{q}_{rad} = \sigma \cdot \epsilon \cdot A \cdot (T_c^4 - T_v^4)$$

Haciendo el cociente entre los dos casos analizados se obtiene:

$$\frac{\dot{q}_{rad,11}}{\dot{q}_{rad,21}} = \frac{\sigma \cdot \epsilon \cdot A \cdot (T_c^4 - T_{11}^4)}{\sigma \cdot \epsilon \cdot A \cdot (T_c^4 - T_{21}^4)}$$

$$\frac{\dot{q}_{rad,11}}{\dot{q}_{rad,21}} = \frac{310^4 - 270,8^4}{310^4 - 287,2^4} = 1,58$$

El calor intercambiado por radiación es un 58 % más alto en el primer caso.

### Apartado 9

Se considera ahora el caso de ventana de doble capa pero sin la hipótesis restrictiva de aire en reposo entre las dos capas de vidrio. La viscosidad cinemática del aire es de  $\nu_{ai} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y el número de Prandtl es  $\text{Pr} = 0,713$ .

Para el cálculo del número de Nusselt se emplea la siguiente correlación:

$$\text{Nu} = 0,42 \cdot \text{Ra}^{1/4} \cdot \text{Pr}^{0,012} \cdot (H/L)^{-0,3}$$

Nota: En los procesos de convección libre para cavidades rectangulares, el coeficiente de película se define como: “Flujo de ‘calor intercambiado por unidad de superficie, dividido por el salto de temperaturas entre caras internas de la cavidad”. Por coherencia con esta definición, el salto de temperaturas a considerar para los números de Grashof y Rayleigh es también el correspondiente a la diferencia de las temperaturas entre caras. El coeficiente de expansión térmica  $\beta$ , a su vez, se calcula para una temperatura, que es la media aritmética de las temperaturas de las caras. La dimensión característica en todos los números adimensionales involucrados es la separación entre capas.

Para calcular el número de Rayleigh primero se debe determinar el número de Grashof de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\text{Gr} = \frac{\beta \cdot g \cdot (T_{22} - T_{23}) \cdot L_{ai}^3}{\nu_{ai}^2}$$

Donde  $\beta$  se define con la temperatura media

$$T_m = \frac{T_{22} + T_{23}}{2} = \frac{13,93 + (-8,26)}{2} = 2,84^\circ\text{C} \Rightarrow T_m = 275,84 \text{ K}$$

$$\beta = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{275,84} = 3,62 \cdot 10^{-3}$$

Reemplazando valores en la definición del número de Grashof:

$$\text{Gr} = \frac{3,62 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot (13,93 - (-8,26)) \cdot 0,001^3}{1,4 \cdot 10^{-5}^2} = 4023,19$$

El número de Rayleigh se calcula como:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = 4023,19 \cdot 0,713 = 2868,5$$

Finalmente el número de Nusselt es:

$$\text{Nu} = 0,42 \cdot 2868,5^{1/4} \cdot 0,713^{0,012} \cdot (0,4/0,01)^{-0,3} = 1,01 \sim 1$$

El coeficiente de película se puede calcular como:

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k_{ai}}{L_{ai}} = \frac{1 \cdot 0,026}{0,01} = 2,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

**Apartado 10**

El flujo de calor entre las dos paredes de vidrio se puede calcular como:

$$\dot{q}_3 = h \cdot A \cdot (T_{22} - T_{23}) = 2,6 \cdot 0,12 \cdot (13,93 - (-8,26)) = 6,92 \text{ W}$$

El resultado obtenido en este apartado es idéntico al obtenido en el apartado 6.

Que el número de Nusselt sea igual a 1 implica que todo el fenómeno de transmisión de calor es por conducción tanto a través de las capas de vidrio como a través de la del aire.

## 3.2 Depósito de oxígeno líquido

Consideremos un depósito esférico de oxígeno líquido que tiene un radio  $r_d$ , está fabricado en acero inoxidable y está alojado en un compartimiento de un transbordador espacial que está a  $T_\infty = cte$ . El contenido del depósito se mantiene a una temperatura ( $T_0 = cte$ ) a base de perder oxígeno evaporado, con un calor latente de evaporación ( $hf_{ox}$ ), a través de una válvula que regula el depósito a  $p = cte$ . Para reducir las pérdidas de oxígeno ( $\dot{m}_{ox}$ ) se recubre el depósito con un material aislante de conductividad ( $k_a$ ), espesor ( $e_a$ ) y densidad ( $\rho_a$ ).

Se pide:

1. Dibujar un esquema simplificado con las resistencias térmicas consideradas. Determinar la resistencia térmica equivalente  $R_{eq}$ . Suponemos que la resistencia térmica ( $R_d$ ) de la pared de acero inoxidable es despreciable frente a la resistencia térmica ( $R_a$ ) del aislante.
2. Hallar una expresión para el flujo de calor aportado al depósito de oxígeno considerando que  $r_d \gg e_a$ .
3. Establecer una relación general entre la masa de oxígeno evaporada por unidad de tiempo y el espesor del aislante. Obtener una expresión simplificada cuando  $h_\infty \gg k_a/e_a$ .
4. Establecer una relación entre el peso del aislante y la masa de oxígeno evaporada.
5. Determinar el espesor de aislante ( $e_a$ ) necesario si:

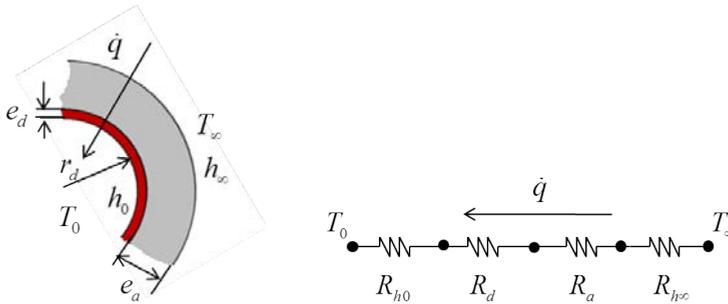
$$\begin{array}{lll} T_\infty = 240 \text{ K} & T_0 = 90 \text{ K} & r_d = 0,5 \text{ m} \\ hf_{ox} = 210 \text{ kJ/kg} & \dot{m}_{ox} = 0,042 \text{ kg/h} & \\ \rho_a = 30 \text{ kg/m}^3 & k_a = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ W/m} \cdot \text{K} & \end{array}$$

6. Se plantea una solución alternativa con material aislante cuya conductividad térmica es  $k_b = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ W/m} \cdot \text{K}$  y su densidad es  $\rho_b = 120 \text{ kg/m}^3$ . Determinar el espesor de aislante necesario ( $e_b$ ) y el peso del aislante.
7. Considerando la solución obtenida en los apartados 5 y 6 comprobar que si el espesor del depósito ( $e_d$ ) de acero inoxidable AISI304 es de 1 cm y su conductividad térmica es  $k_d = 9 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ , la resistencia térmica de la pared del depósito es efectivamente, despreciable frente a la del aislante.
8. Considerando la solución obtenida en los apartados 5 y 6, suponiendo que el coeficiente de película ( $h_\infty$ ) entre la esfera y el entorno es de  $20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , determinar el número de Biot y comprobar que la hipótesis realizada en el apartado 1 de despreciar la resistencia térmica de la convección es razonable.

## Apartado 1

El flujo de calor entre  $T_\infty$  y  $T_0$  tiene que atravesar una serie de resistencias térmicas. Una resistencia por convección  $R_{h_\infty}$  entre el exterior y la capa de aislante, una resistencia por conducción del aislante  $R_a$ , una resistencia por conducción del material del depósito  $R_d$  y finalmente una resistencia por convección entre la pared interna del depósito y el oxígeno  $R_{h_0}$ .

El Esquema de resistencias considerado está representado en la figura 3.2.1.



**Figura 3.2.1:** Esquema del depósito de oxígeno y disposición de las resistencias.

La resistencia térmica equivalente ( $R_{eq}$ ) es la suma de todas las resistencias consideradas.

$$R_{eq} = R_{h_\infty} + R_a + R_d + R_{h_0}$$

Dado que el contenido del depósito se mantiene a  $T_0 = cte$  y no tenemos información acerca del coeficiente de película interior, suponemos que la temperatura de la pared del depósito es igual a  $T_0$  por tanto  $R_{h_0} \approx 0$ , puesto que además  $R_d \approx 0$ , el valor de la  $R_{eq}$  será:

$$R_{eq} = R_{h_\infty} + R_a$$

## Apartado 2

El calor aportado al depósito de oxígeno por unidad de tiempo se puede expresar como:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{T_\infty - T_0}{R_{h_\infty} + R_a}$$

Donde las resistencias  $R_{h\infty}$  y  $R_a$ , se puede expresar como:

$$R_a = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_a} \cdot \left[ \frac{1}{r_d} - \frac{1}{(r_d + e_a)} \right]$$

$$R_{h\infty} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot h_\infty \cdot (r_d + e_a)^2}$$

Siendo  $r_d \gg e_a$  las expresiones de  $R_{h\infty}$  y  $R_a$  quedan como:

$$R_a = \frac{e_a}{4 \cdot \pi \cdot k_a \cdot r_d^2}$$

$$R_{h\infty} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot h_\infty \cdot r_d^2}$$

Reemplazando los valores de  $R_{h\infty}$  y  $R_a$  en la expresión del flujo de calor queda:

$$\dot{q} = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \frac{T_\infty - T_0}{e_a/k_a + 1/h_\infty}$$

### Apartado 3

De acuerdo al enunciado para mantener la temperatura constante del depósito se evapora una cierta masa de oxígeno. Por tanto esta masa de oxígeno debe ser proporcional el flujo de calor que entra al depósito.

$$\dot{q} = \dot{m}_{ox} \cdot h_{fox}$$

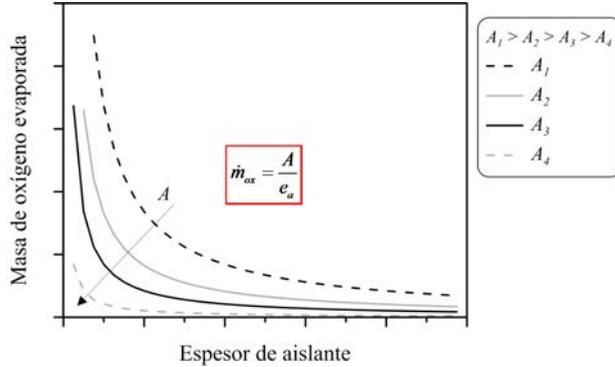
Siendo  $h_{fox}$  el calor latente de evaporación del oxígeno. Igualando esta expresión con la hallada en el apartado anterior se obtiene:

$$\dot{m}_{ox} = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \frac{T_\infty - T_0}{h_{fox}} \cdot \frac{1}{e_a/k_a + 1/h_\infty}$$

Considerando que el término  $1/h_\infty$  es mucho menor que  $e_a/k_a$ , la expresión para el gasto másico de oxígeno queda como:

$$\dot{m}_{ox} = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \frac{T_\infty - T_0}{h_{fox}} \cdot \frac{k_a}{e_a}$$

Por tanto existe una relación de tipo hiperbólico entre la masa de oxígeno evaporada y el espesor del aislante tal como se muestra (de forma cualitativa) en la figura 3.2.2.



**Figura 3.2.2:** Relación entre la masa de oxígeno evaporada ( $\dot{m}_{ox}$ ) y el espesor del aislante  $e_a$ .

El parámetro  $A$  tiene en cuenta las dimensiones del depósito, las temperaturas de trabajo y el material utilizado como aislante.

#### Apartado 4

El peso del volumen de aislante que es necesario añadir será:

$$P_a = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot e_a \cdot \rho_a \cdot g$$

Lo que indica que si el tamaño del depósito y el material a utilizar están definidos, el peso del aislante solo crece linealmente con el espesor de éste.

Sin embargo, otra forma de ver el problema es analizando como varía el peso del aislante en función de la masa de oxígeno evaporada, para ello se parte de la ecuación obtenida en el apartado anterior.

$$\dot{m}_{ox} = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \frac{T_\infty - T_0}{h f_{ox}} \cdot \frac{k_a}{e_a} \cdot \frac{e_a}{e_a} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot e_a = \dot{m}_{ox} \cdot e_a^2 \cdot \frac{h f_{ox}}{k_a \cdot (T_\infty - T_0)}$$

Reemplazando en la expresión del peso del aislante se obtiene:

$$P_a = \dot{m}_{ox} \cdot e_a^2 \cdot \frac{h f_{ox}}{k_a \cdot (T_\infty - T_0)} \cdot \rho_a \cdot g$$

El peso del aislante crece linealmente con la masa de oxígeno evaporada y de forma cuadrática con el espesor del aislante.

### Apartado 5

Despejando el espesor de aislante de la ecuación de la masa de oxígeno evaporada y reemplazando valores se obtiene:

$$e_a = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \frac{k_a \cdot (T_\infty - T_0)}{h f_{ox}} \cdot \frac{1}{\dot{m}_{ox}}$$
$$e_a = 4 \cdot \pi \cdot 0,5^2 \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot (240 - 90)}{0,210} \cdot \frac{1}{1} = 0,02908 \text{ m}$$

$$e_a = 29,08 \text{ mm}$$

El peso del aislante es:

$$P_a = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot e_a \cdot \rho_a \cdot g = 4 \cdot \pi \cdot 0,5^2 \cdot 0,029 \cdot 30 \cdot g$$

$$P_a = g \cdot 2,74 \text{ N}$$

### Apartado 6

Para el nuevo aislante se repiten los cálculos realizados en el apartado anterior, obteniendo como resultado:

$$e_b = 2,908 \text{ mm} \quad \text{y} \quad P_b = g \cdot 1,09 \text{ N}$$

Como puede verse el espesor de aislante se ha reducido un orden de magnitud debido a la menor conductividad térmica del aislante, sin embargo el peso sólo se ha reducido a la mitad debido a la mayor densidad del aislante.

La relación de pesos de aislante para una misma masa de oxígeno evaporada es:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{e_a}{e_b} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_b}$$

## Apartado 7

La resistencia térmica de una corteza esférica tiene por expresión general:

$$R = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}$$

Particularizando esta expresión para este problema:

Para el acero inoxidable:  $e_d \ll r_d$

$$R_d = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_d} \cdot \frac{r_d - (r_d - e_d)}{r_d \cdot (r_d - e_d)} \Rightarrow R_d = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_d} \cdot \frac{e_d}{r_d^2}$$

Para el aislante b:  $e_b \ll r_d$

$$R_b = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_b} \cdot \frac{(r_d + e_b) - r_d}{(r_d + e_b) \cdot r_d} \Rightarrow R_b = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_b} \cdot \frac{e_b}{r_d^2}$$

Haciendo el cociente entre ambas resistencias térmicas.

$$\frac{R_b}{R_d} = \frac{k_d}{k_b} \cdot \frac{e_b}{e_d} \Rightarrow \frac{R_b}{R_d} = \frac{9}{1,5 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{2,908}{10} = 1,75 \cdot 10^5$$

Con lo que se demuestra que  $R_d \ll R_b$  por lo que la hipótesis supuesta en el apartado 1 es correcta.

## Apartado 8

Para verificar que la hipótesis de despreciar la resistencia por convección es razonable se hace el cociente entre ellas.

$$\left. \begin{aligned} R_b &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k_b} \cdot \frac{e_b}{r_e^2} \\ R_{h\infty} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot h_\infty} \cdot \frac{1}{r_e^2} \end{aligned} \right\} \frac{R_b}{R_{h\infty}} = \frac{e_b}{k_b} \cdot h_\infty = \text{Bi}$$

Siendo Bi el número de Biot que relaciona las resistencias térmicas en problemas de convección - conducción.

Para los datos del problema se obtiene:

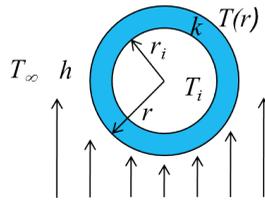
$$\text{Bi} = \frac{R_b}{R_{h\infty}} = \frac{2,908 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-5}} \cdot 20 = 3,9 \cdot 10^3$$

Efectivamente para los datos del problema la resistencia térmica del aislante es tres ordenes de magnitud superior a la de convección. En definitiva, la resistencia térmica que controla el proceso es debida al aislante y tanto la pared del depósito como la convección fluido exterior/aislante son despreciables. Todo el salto de temperatura ocurre en el aislante.

### 3.3 Radio crítico

Una tubería de cobre de espesor despreciable frente al radio  $r_i$  se emplea para transportar un fluido refrigerante a temperatura  $T_i$ . La temperatura de la pared externa  $T(r)$  es igual a  $T_i$  cuando no existe aislante térmico alrededor de la tubería.

La tubería se encuentra inmersa en un flujo de un fluido con una temperatura  $T_\infty > T_i$  y se supone que el coeficiente de convección es conocido y tiene valor  $h$ .



Suponiendo condiciones estacionarias y flujo de calor unidimensional en sentido radial, se pide:

1. Determinar de forma general si existe un óptimo en el espesor de una posible capa aislante concéntrica con la tubería.
2. Particularizar la solución para los valores siguientes:  $k = 0,055 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $h = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y  $r_i = 5 \text{ m}$

#### Apartado 1

La resistencia al intercambio de calor entre el refrigerante y el aire está controlada por conducción a través del aislante y convección entre la superficie externa del aislante y el aire.

La resistencia térmica total ( $R_{TOT}$ ) por unidad de longitud axial de la tubería se puede expresar como la suma de estas dos resistencias.

$$R_{TOT} = \frac{\ln(r/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

Se observa que el primer término crece con el radio ( $r$ ) mientras que el segundo disminuye.

El flujo de calor por unidad de longitud axial se calcula como:

$$\frac{\dot{q}}{L} = \frac{T_\infty - T_i}{R_{TOT}}$$

Un espesor óptimo de aislante debe estar asociado con un valor de  $r$  que minimice el flujo de calor o maximice la resistencia total.

Para que esta condición exista, en primer lugar la función  $R_{TOT}$  debe tener una tangente horizontal, es decir su derivada primera debe ser nula.

$$\frac{dR_{TOT}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot r} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h} = 0$$

Esta condición se satisface para  $r = k/h$ , es decir no depende del radio de la tubería  $r_i$ .

En segundo lugar, para determinar si este valor es un máximo o un mínimo de la función es necesario determinar la segunda derivada de la función  $R_{TOT}$ .

$$\frac{d^2 R_{TOT}}{dr^2} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot r^2} + \frac{1}{\pi \cdot r^3 \cdot h} = 0$$

Particularizando la segunda derivada para:  $r = k/h$

$$\frac{d^2 R_{TOT}}{dr^2} = \frac{1}{\pi \cdot (k/h)^2} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{2 \cdot k} \right)$$

$$\frac{d^2 R_{TOT}}{dr^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot k^3/h^2} > 0$$

Como el valor de la segunda derivada es siempre mayor que cero significa que para  $r = (k/h)$  la resistencia tiene un mínimo, por lo tanto el flujo de calor será máximo, por lo que se concluye que en realidad “no existe un óptimo”, en realidad “existe un pésimo”.

Cuando  $r = k/h$  el radio puede considerarse más bien como un “radio crítico”, puesto que maximiza el flujo de calor.

$$r_{cr} = \frac{k}{h}$$

El radio crítico obtenido puede ser:

- $r_{cr} \leq r_i \rightarrow R_{TOT}$  es siempre creciente en  $r[r_i, \infty]$ . En este caso siempre es interesante aislar térmicamente.
- $r_{cr} > r_i \rightarrow R_{TOT}$  es decreciente entre  $r_i$  y  $r_{cr}$  para volver a crecer a partir de  $r_{cr}$ . En este caso no siempre es interesante aislar térmicamente.

## Apartado 2

Reemplazando los valores en la expresión del radio crítico obtenida en el apartado anterior.

$$r_{cr} = \frac{k}{h} = \frac{0,055}{5} = 0,011 \text{ m} = 11 \text{ mm} > r_i$$

Por lo que el espesor de aislante correspondiente al radio crítico es:

$$e_{ais.cr} = r_{cr} - r_i = 11 - 5 = 6 \text{ mm}$$

Por debajo de este valor y hasta cero (sin aislante) el flujo de calor disminuye hasta estar dominado solo por convección con un área de transferencia de calor proporcional a  $r_i$ .

Para espesores de aislante mayores que 6 mm, el flujo de calor también disminuye hasta igualar el valor correspondiente al caso de ausencia de aislante. Esto ocurre para un radio denominado  $r^*$  y que puede determinarse a partir de:

$$R_{TOT.para\ r^*} = R_{conv\ sin\ aislante}$$

$$\frac{\ln(r^*/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r^* \cdot h} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot h}$$

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$\ln(r^*/r_i) = \frac{k}{h} \cdot \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r^*} \right) = \frac{k}{h \cdot r_i} \cdot \left( 1 - \frac{r_i}{r^*} \right)$$

Para los datos del problema la solución de la ecuación anterior es:  $r^* = 32 \text{ mm}$ , o lo que es lo mismo:

$$r^* - r_i = 32 - 5 = 27 \text{ mm}$$

Si se sigue aumentando el espesor del aislante a partir de este valor se consigue el efecto de reducción del flujo de calor respecto del caso de no utilizar la capa de aislante concéntrica.

Para que sea “rentable” utilizar capas aislantes concéntricas en este tipo de problemas,  $r^*/r_i$  debe tender a la unidad. Esto se consigue con valores pequeños de

$k/h$ , es decir condiciones en las que el coeficiente de conductividad  $k$  es pequeño y el coeficiente de película  $h$  es grande.

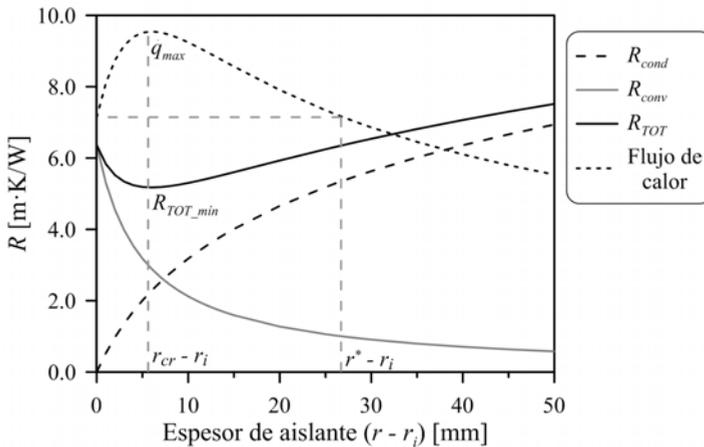
Conviene que  $r_{cr} \leq r_i$  es decir:

$$1 \leq \frac{k}{h \cdot r_i} = \text{Bi}$$

El número de Biot referido al radio interior tiene que ser mayor o igual que la unidad.

Si  $r_{cr} > r_i$  para reducir apreciablemente la pérdida de calor respecto al caso sin aislamiento, el radio de éste debe estar claramente por encima de  $r^*$  lo que en muchos casos es caro y voluminoso.

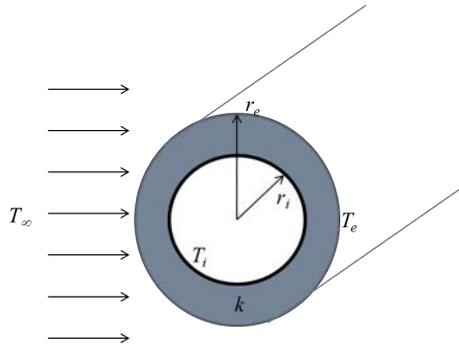
En la figura 3.3.1 se han representado los valores de las resistencia por convección, conducción y la total, como así también el flujo de calor en función del espesor del aislante. Se puede observar con claridad lo explicado referente al valor  $r^*$ .



**Figura 3.3.1:** Resistencias y flujo de calor en función del espesor de aislante (el flujo de calor no está a escala).

### 3.4 Tubería cilíndrica. Espesor crítico de aislamiento

Una tubería cilíndrica de cobre con un radio externo  $r_i$  tiene una temperatura en su superficie externa  $T_i$  que se considera constante. La tubería se recubre de un aislante térmico con conductividad térmica  $k$  y radio externo  $r_e$ , siendo la temperatura de la superficie externa  $T_e$  y estando el conjunto en una atmósfera de aire con una temperatura constante  $T_\infty$ . El coeficiente de película de transmisión de calor por convección entre la superficie externa del aislante es el correspondiente a unas condiciones de convección forzada en flujo transversal, y se puede considerar la ecuación de Hilpert para determinarlo,  $Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^{1/3}$ .



Se pide:

1. Suponiendo flujo térmico unidimensional, determinar el campo radial de temperaturas  $T(r)$  en el aislante si las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} r = r_i & \quad T(r_i) = T_i \\ r = r_e & \quad k \cdot \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=r_e} = -h_e \cdot (T_e - T_\infty) \end{aligned}$$

Siendo  $h_e$  el coeficiente de película correspondiente al radio  $r_e$ .

2. Comprobar a partir del apartado anterior que el campo de temperaturas se puede escribir de formar adimensional como:

$$\theta(r) = 1 - Bi \cdot \theta(r_e) \cdot h_e^* \cdot r_e^* \cdot \ln(r^*)$$

Siendo:  $\theta(r) = (T(r) - T_\infty)/(T_i - T_\infty)$  ;  $r^* = r/r_i$  ;  $r_e^* = r_e/r_i$  ;  $h_e^* = h_e/h_i$  ;  $Bi = (h_i \cdot r_i)/k$

Siendo  $h_i$  el coeficiente de película correspondiente al radio  $r_i$  cuando no hay aislante.

Dibujar un diagrama esquemático  $\theta(r)$  vs.  $r^*$ , estableciendo el intervalo de las dos variables.

3. Comprobar que a partir de la ecuación de Hilpert el coeficiente de película adimensional se puede escribir como:

$$h_e^* = \frac{h_e}{h_i} = (r_e^*)^{m-1}$$

Suponer para esta comprobación que las propiedades del aire son constantes.

4. Determinar una expresión para el flujo de calor intercambiado por unidad de longitud de tubería,  $\dot{q}_e$ , entre la superficie externa del cilindro y el aire.
5. Comprobar que el flujo de calor adimensional intercambiado se puede escribir como:

$$q^* = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_i} = (r_e^*)^m \cdot \theta(r_e)$$

Siendo  $\dot{q}_e$  el flujo de calor obtenido en el apartado anterior y  $\dot{q}_i$  el flujo de calor intercambiado por la tubería en ausencia de aislante.

6. Determinar una expresión del radio adimensional  $r_e^*$  en función de  $m$  y Bi que maximiza las pérdidas de calor adimensionales  $q^*$ , es decir, el  $r_e^*$  que llamaremos radio crítico  $r_{e.cr}^*$ .

Nota: Realizar la primera derivada e igualando a cero se tiene una solución única que se corresponde con un máximo. No es necesario realizar la segunda derivada para comprobar que es intrínsecamente negativa.

7. Comparar la expresión obtenida en el apartado anterior con la que se obtiene para un problema semejante en el que suponemos que el coeficiente de película  $h$  es constante e independiente de  $r_e$  y donde se obtiene para el radio crítico,  $r_{e.cr} = k/h$ . Justificar las diferencias y similitudes de estas dos expresiones con razonamientos físicos.
8. Establecer un valor límite para el número de Bi por encima del cual aumentar el espesor del aislante siempre disminuya el calor intercambiado entre el cilindro y el aire ambiente. Dibujar esquemáticamente un diagrama  $q^*$  vs.  $r_e^*$  para  $r_{e.cr}^* < 1$ ,  $r_{e.cr}^* = 1$  y  $r_{e.cr}^* > 1$ .

9. Determinar la resistencia térmica del intercambio de calor entre el cilindro y el aire cuando no hay aislante térmico,  $R_{TOT.i}$  y cuando hay aislante térmico con un radio  $r_e$ ,  $R_{TOT.e}$ . Definimos una resistencia térmica adimensional  $R_{TOT.e}^* = R_{TOT.e}/R_{TOT.i}$  cuya expresión se pide determinar en función de  $r_e^*$ ,  $m$  y  $Bi$ .
10. Dibujar esquemáticamente el valor de las resistencias térmicas adimensionales debida a la conducción y a la convección en función de  $r_e^*$  tomando como parámetro  $m$  y  $Bi$ .
11. Determinar el valor de  $r_e^*$  que minimiza la resistencia térmica que se ha denominado  $r_{e.cr}^*$ , y compararlo con el obtenido en el apartado 6.
12. Determinar  $Re_{Di}$ ,  $Re_{De}$ ,  $Nu_{Di}$ ,  $Nu_{De}$ ,  $Bi$  y la temperatura  $T_e$  con los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} T_i = 500^\circ\text{C} & T_\infty = 30^\circ\text{C} & k = 0,05 \text{ W/m} \cdot \text{K} \\ r_i = 0,1 \text{ m} & r_e = 0,2 \text{ m} & u = 20 \text{ m/s} \end{array}$$

Propiedades del aire:

$$\nu_{ai} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad k_{ai} = 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad Pr = 0,7$$

Constantes para la ecuación de Hilper:

$$m = 0,8 \quad C = 0,027$$

13. Determinar el flujo de calor intercambiado por unidad de longitud  $\dot{q}_e$  y el flujo de calor adimensional  $q^*$ . Determinar el radio crítico adimensional,  $r_{e.cr}^*$  y el radio crítico,  $r_e^*$  para estas condiciones.
14. Determinar los mismos valores pedidos en el apartado 12 y 13 siendo  $k = 0,1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  y  $u = 0,05 \text{ m/s}$ . Comentar el resultado y compararlo con los obtenidos en los apartados anteriores.
15. Justificar a la vista de los resultados del apartado anterior si la ecuación de Hilpert con  $m = 0,8$  y  $C = 0,027$  sigue siendo válida. Justificar si la hipótesis de convección forzada sigue siendo aceptable. En caso de no serlo ¿qué correlación utilizaría para la estimación del número de Nusselt?

### Apartado 1

La ecuación general de conducción de calor se puede escribir, en coordenadas cilíndricas, de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{gen} = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

El problema que se plantea es un problema de transmisión de calor estacionario, unidimensional y sin generación de calor, por lo tanto la ecuación general queda de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0$$

Integrando esta ecuación se obtiene:

$$r \cdot \frac{dT(r)}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(r)}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

Integrando nuevamente.

$$T(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Aplicando las condiciones de contorno se puede obtener los valores de las constantes de integración.

Para  $r = r_e$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=r_e} = -\frac{h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty)$$

$$\frac{dT(r_e)}{dr} = \frac{C_1}{r_e} = -\frac{h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty)$$

$$C_1 = -\frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty)$$

Para  $r = r_i$

$$T(r_i) = T_i = C_1 \cdot \ln r_i + C_2$$

$$T_i = -\frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty) \cdot \ln r_i + C_2$$

$$C_2 = T_i + \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty) \cdot \ln r_i$$

Una vez obtenido el valor de ambas constantes se remplazan en la ecuación del campo de temperaturas, obteniendo:

$$T(r) = -\frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty) \cdot \ln r + T_i + \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty) \cdot \ln r_i$$

Operando convenientemente se puede obtener:

$$T(r) = T_i - \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot (T_e - T_\infty) \cdot \ln (r/r_i)$$

## Apartado 2

Si a la ecuación obtenida en el apartado anterior se le resta en ambos miembros  $T_\infty$  y se divide por  $(T_i - T_\infty)$  se obtiene:

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} - \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot \frac{T_e - T_\infty}{T_i - T_\infty} \cdot \ln (r/r_i)$$

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1 - \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot \frac{T_e - T_\infty}{T_i - T_\infty} \cdot \ln (r/r_i)$$

Si ahora al segundo miembro de la derecha lo multiplicamos y dividimos por  $h_i \cdot r_i$ .

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1 - \frac{r_e \cdot h_e}{k} \cdot \frac{h_i \cdot r_i}{h_i \cdot r_i} \cdot \frac{T_e - T_\infty}{T_i - T_\infty} \cdot \ln (r/r_i)$$

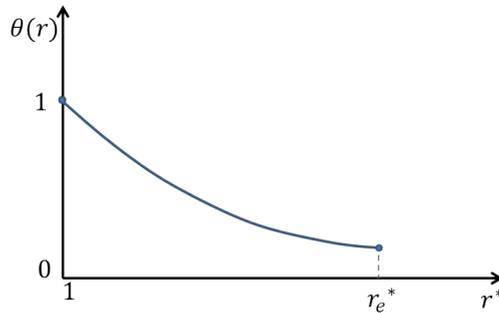
Haciendo uso de las definiciones dadas en el enunciado la ecuación puede escribirse como:

$$\theta(r) = 1 - \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \theta(r_e) \cdot \ln r^*$$

El intervalo para las dos variables de la ecuación anterior es:

$\theta(r) = 1$  para  $T(r) = T_i$  situación que ocurre cuando  $r = r_i$ , por lo tanto  $r^* = 1$ .

El valor de  $r^*$  tendrá como valor máximo  $r_e^*$ , puesto que  $r$  varía entre  $r_i$  y  $r_e$ , para este caso el valor de  $\theta(r)$  será menor que 1 ya  $T(r_e)$  es siempre menor que  $T_i$ . El valor final de la temperatura adimensional dependerá de las condiciones del problema, sin embargo, de forma esquemática se puede representar como se indica en la figura 3.4.1.



**Figura 3.4.1:** Rango de variación de  $\theta(r)$  en función de  $r^*$  para este problema.

### Apartado 3

Para poder hallar el coeficiente de película adimensional primero se debe encontrar una expresión para  $h_i$  y para  $h_e$ . Si se calcula, a partir de la ecuación de Hilpert, el número de Nusselt caracterizado para el diámetro interior, es decir, cuando no tenemos aislante, se obtiene:

$$\text{Nu}_{D_i} = \frac{h_i \cdot D_i}{k_{ai}} = C \cdot \text{Re}_{D_i}^m \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Para el caso en que tenemos un aislante y por lo tanto un diámetro  $D_e$  distinto de  $D_i$ , la ecuación de Hilpert se expresa de la siguiente forma:

$$\text{Nu}_{D_e} = \frac{h_e \cdot D_e}{k_{ai}} = C \cdot \text{Re}_{D_e}^m \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Haciendo el cociente entre las dos ecuaciones, asumiendo como dice el enunciado que las propiedades fisicoquímicas del aire son constantes, se obtiene:

$$\frac{h_e \cdot D_e}{h_i \cdot D_i} = \frac{\text{Re}_{D_e}^m}{\text{Re}_{D_i}^m}$$

Teniendo en cuenta la definición del número de Reynolds, la expresión anterior se puede expresar como:

$$h^* = \frac{h_e}{h_i} = \frac{D_e^m}{D_i^m} \cdot \frac{D_i}{D_e}$$

Operando convenientemente y expresando en función de los radios se puede obtener:

$$h^* = \frac{h_e}{h_i} = \frac{r_e^{m-1}}{r_i^{m-1}} \quad \Rightarrow \quad h^* = (r_e^*)^{m-1}$$

#### Apartado 4

El flujo de calor intercambiado entre la superficie externa de la tubería y el aire se puede obtener de forma genérica a partir de la siguiente ecuación:

$$\dot{q} = A \cdot h \cdot \Delta T$$

Para el caso de nuestro problema el área del cilindro es el producto del perímetro por su longitud, y teniendo en cuenta que el enunciado pide calcular el flujo de calor por unidad de longitud, la ecuación anterior queda:

$$\dot{q}_e = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot h_e \cdot (T_e - T_\infty)$$

Siendo  $\dot{q}_e$  el flujo de calor por unidad de longitud.

### Apartado 5

Para calcular el flujo de calor adimensional, primero hay que calcular el flujo de calor para el caso en que no hay aislante. De forma similar a lo obtenido en el apartado anterior se puede expresar que:

$$\dot{q}_i = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot h_i \cdot (T_i - T_\infty)$$

Haciendo el cociente entre las expresiones halladas para  $\dot{q}_e$  y  $\dot{q}_i$  se obtiene:

$$q^* = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_i} = \frac{r_e \cdot h_e \cdot (T_e - T_\infty)}{r_i \cdot h_i \cdot (T_i - T_\infty)}$$

Utilizando la expresión obtenida en el apartado 3 y siendo el cociente de temperaturas la temperatura adimensional cuando  $r = r_e$ .

$$q^* = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_i} = r_e^* \cdot (r_e^*)^{m-1} \cdot \theta(r_e) \quad \Rightarrow \quad q^* = (r_e^*)^m \cdot \theta(r_e)$$

### Apartado 6

Para obtener el  $r_e^*$  que maximice las pérdidas de calor adimensionales, hay que derivar la ecuación obtenida en el apartado 5 respecto a  $r_e^*$ , e igualar a cero.

Hay que tener en cuenta antes de hacer la derivada que la temperatura adimensional  $\theta(r_e)$  también es función de  $r_e^*$ . Por tanto, hay que obtener la expresión de la temperatura adimensional en función de  $r_e^*$ , para ello caracterizamos la ecuación obtenida en el apartado 2 para el caso de  $r = r_e$ .

$$\theta(r_e) = 1 - \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \theta(r_e) \cdot \ln r_e^*$$

Operando convenientemente se obtiene:

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \ln r_e^*}$$

Utilizando la relación obtenida en el apartado 3.

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + \text{Bi} \cdot (r_e^*)^m \cdot \ln r_e^*}$$

Reemplazando esta ecuación en la obtenida en el apartado 5, se obtiene:

$$q^* = \frac{(r_e^*)^m}{1 + \text{Bi} \cdot (r_e^*)^m \cdot \ln r_e^*}$$

Si al denominador lo identificamos como  $\chi = f(r_e^*)$  se puede escribir:

$$q^* = \frac{(r_e^*)^m}{\chi}$$

Si derivamos la expresión anterior, respecto a  $r_e^*$  e igualamos a cero:

$$\frac{q^*}{dr_e^*} = \frac{m \cdot (r_e^*)^{m-1} \cdot \chi - (r_e^*)^m \cdot \text{Bi} [m \cdot (r_e^*)^{m-1} \cdot \ln r_e^* + (r_e^*)^{m-1}]}{\chi^2} = 0$$

$$m \cdot (r_e^*)^{m-1} \cdot \chi - (r_e^*)^m \cdot \text{Bi} [m \cdot (r_e^*)^{m-1} \cdot \ln r_e^* + (r_e^*)^{m-1}] = 0$$

Reemplazando el valor de  $\chi$  y reordenando los términos se obtiene:

$$m \cdot (r_e^*)^{m-1} - \text{Bi} \cdot (r_e^*)^{2m-1} = 0$$

Teniendo en cuenta que al valor de  $r_e^*$  que hace que la ecuación anterior sea igual a cero lo llamaremos  $r_{e.cr}^*$ , se puede escribir:

$$(r_{e.cr}^*)^m = \frac{m}{\text{Bi}}$$

## Apartado 7

La expresión que se obtiene, donde el coeficiente de película es independiente del radio (ver problema anterior), es la siguiente:

$$r_{e.cr} = k/h$$

Si dividimos ambos términos por  $r_i$  con el objeto de obtener el radio crítico adimensionalizando y teniendo en cuenta que  $h_i = h_e$ , puesto que  $h$  es independiente del radio, se obtiene:

$$\frac{r_{e.cr}}{r_i} = \frac{k}{h \cdot r_i} \Rightarrow r_{e.cr}^* = \frac{k}{h \cdot r_i} = \frac{1}{\text{Bi}}$$

Si comparamos esta ecuación con la obtenida en el apartado anterior se observa que ambas ecuaciones son idénticas para  $m = 1$ , que se da cuando  $h$  es independiente del radio.

### Apartado 8

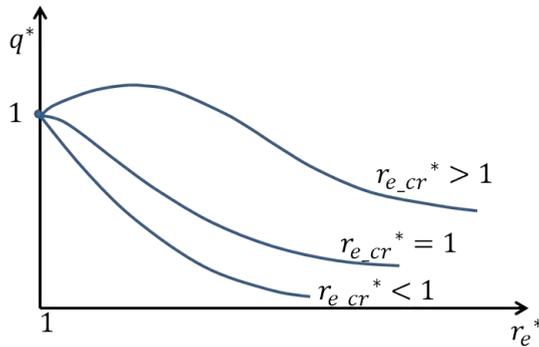
La condición para que el flujo de calor siempre disminuya cuando aumentamos el espesor de aislante se da para el caso en que el  $r_{e.cr}^* = 1$ , es decir es el caso cuando  $r_{e.cr} = r_i$ . Este caso es un caso límite donde el flujo de calor máximo se produce cuando no hay aislante, por lo tanto, cualquier espesor de éste reduciría el flujo de calor.

Por consiguiente, la ecuación obtenida en el apartado 6 queda:

$$(r_{e.cr}^*)^m = \frac{m}{Bi} = 1 \quad \Rightarrow \quad Bi = m$$

Para  $Bi = m$  tenemos el valor límite para el cual cualquier incremento en el espesor de aislante disminuye el flujo de calor.

De forma esquemática en la figura 3.4.2 representa cómo varía el flujo de calor adimensional para los tres casos planteados en el enunciado.



**Figura 3.4.2:** Variación de flujo de calor adimensional  $q^*$  para los tres casos propuestos.

$r_{e.cr}^* = 1$ . Este es el caso límite donde el flujo de calor adimensional es igual a la unidad, por tanto la curva de flujo de calor adimensional tendrá un máximo en este punto (tangente horizontal).

$r_{e.cr}^* < 1$ . En este caso lo que nos dice que el radio crítico, que maximiza el flujo calor es menor que el radio de la tubería, de este modo el flujo, cualquier incremento en el espesor del aislante reducirá aún más el flujo de calor.

$r_{e.cr}^* > 1$ . En este caso lo que se indica es que existe un radio que maximiza el flujo de calor y este radio es mayor que el radio de la tubería, por lo tanto, el flujo de calor adimensional tendrá un máximo (mayor que la unidad).

## Apartado 9

La resistencia térmica cuando no hay aislante entre la tubería y el aire es sólo la debida a la convección y se expresa como:

$$R_{TOT.i} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot h_i}$$

Para el caso en que existe aislante, además de la resistencia de convección existe una resistencia de conducción a través del aislante, por lo tanto:

$$R_{TOT.e} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot L \cdot h_e} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L}$$

Para hallar la resistencia adimensional se hace el cociente entre ambas y se obtiene:

$$R_{TOT.e}^* = \frac{R_{TOT.e}}{R_{TOT.i}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot h_i}{2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot L \cdot h_e} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot h_i \cdot \ln(r_e/r_i)}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot L}$$

$$R_{TOT.e}^* = \frac{r_i \cdot h_i}{r_e \cdot h_e} + \frac{r_i \cdot h_i \cdot \ln(r_e/r_i)}{k}$$

$$R_{TOT.e}^* = \frac{1}{r_e^* \cdot h_e^*} + \text{Bi} \cdot \ln r_e^*$$

Si reemplazamos el valor obtenido para  $h_e^*$  en el apartado 3, la ecuación queda como:

$$R_{TOT.e}^* = \frac{1}{(r_e^*)^m} + \text{Bi} \cdot \ln r_e^*$$

### Apartado 10

La ecuación obtenida en el apartado anterior representa los dos términos de la resistencia térmica de este problema a medida que varía el espesor del aislante. El primero es el debido a la convección entre la pared del aislante y el aire (función de  $m$ ) y el segundo es el debido a la conducción a través del aislante (función de  $Bi$ ).

En la figura 3.4.3 se presentan de forma esquemática como sería la variación de estas resistencias en función de  $r_e^*$  y cómo se modifican al variar los parámetros de que dependen.

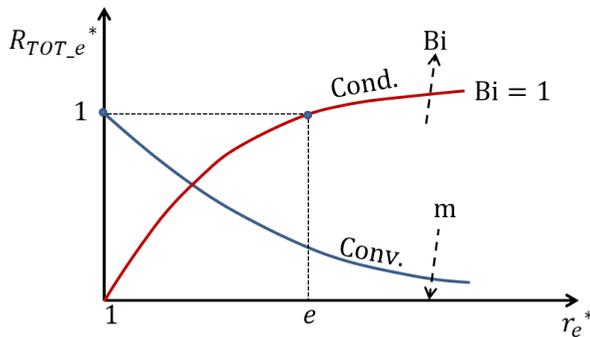


Figura 3.4.3: Variación de de las resistencias térmicas del problema.

### Apartado 11

El valor de  $r_e^*$  que minimiza la resistencia térmica, es el que iguala a cero la derivada de la ecuación obtenida en el apartado 9.

$$\frac{dR_{TOT,e}^*}{dr_e^*} = 0 = \frac{m}{(r_{e.cr}^*)^{m+1}} + \frac{Bi}{r_{e.cr}^*}$$

Operando convenientemente se obtiene:

$$(r_{e.cr}^*)^m = \frac{m}{Bi}$$

Que es la misma ecuación que la obtenida en el apartado 6. Por tanto minimizar la resistencia térmica adimensional es lo mismo que decir que se maximiza el flujo de calor adimensional.

**Apartado 12**

A partir de la definición del número de Reynolds ( $Re = u \cdot D/\nu$ ) se puede calcular:

$$Re_{D_i} = \frac{u \cdot 2 \cdot r_i}{\nu_{ai}} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 0,1}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 250000$$

$$Re_{D_e} = \frac{u \cdot 2 \cdot r_e}{\nu_{ai}} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 0,2}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 500000$$

A partir de la ecuación de Hilpert se calculan los números de Nusselt.

$$Nu_{D_i} = C \cdot Re_{D_i}^m \cdot Pr^{1/3} = 0,027 \cdot 250000^{0,8} \cdot 0,7^{1/3} = 498,98$$

$$Nu_{D_e} = C \cdot Re_{D_e}^m \cdot Pr^{1/3} = 0,027 \cdot 500000^{0,8} \cdot 0,7^{1/3} = 868,77$$

A partir de los números de Nusselt se pueden calcular los coeficientes de película.

$$Nu_{D_i} = \frac{h_i \cdot 2 \cdot r_i}{k_{ai}} \quad \Rightarrow \quad h_i = \frac{Nu_{D_i} \cdot k_{ai}}{2 \cdot r_i}$$

$$h_i = \frac{498,98 \cdot 0,026}{2 \cdot 0,1} = 64,87 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$h_e = \frac{Nu_{D_e} \cdot k_{ai}}{2 \cdot r_e} = \frac{868,77 \cdot 0,026}{2 \cdot 0,2} = 56,47 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Con estos valores se puede calcular el número de Biot y los parámetros adimensionales.

$$Bi = \frac{h_i \cdot r_i}{k} = \frac{64,87 \cdot 0,1}{0,05} = 129,7$$

$$h_e^* = \frac{h_e}{h_i} = \frac{56,47}{64,87} = 0,87 \quad \text{y} \quad r_e^* = \frac{r_e}{r_i} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

Un valor tan alto del número de Biot indica que el gradiente de temperatura dentro del aislante será muy grande, sin embargo, la diferencia de temperaturas entre la pared externa del aislante y el aire será muy pequeña. Para calcular la temperatura de la pared exterior del aislante es necesario utilizar la ecuación del

campo de temperaturas adimensional obtenida en el apartado 2 y caracterizada para  $r = r_e$ .

$$\theta(r_e) = 1 - \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \theta(r_e) \cdot \ln r_e^*$$

Operando convenientemente se obtiene:

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \ln r_e^*}$$

Reemplazando valores.

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + 129,7 \cdot 2 \cdot 0,87 \cdot \ln 2} = 0,00634$$

A partir de la definición de la temperatura adimensional  $\theta(r_e)$  se obtiene la temperatura exterior del aislante.

$$\theta(r_e) = \frac{T_e - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \Rightarrow \quad T_e = \theta(r_e) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty$$

$$T_e = 0,00634 \cdot (500 - 30) + 30 = 32,98^\circ\text{C}$$

Como se ve al calcular el valor de la temperatura de la pared exterior, la variación de temperaturas dentro del aislante es muy grande  $500^\circ\text{C}$  a  $32,98^\circ\text{C}$ , sin embargo, la caída de temperatura debida a la convección es del orden de  $3^\circ\text{C}$ . Resultado este que era de esperar debido al valor obtenido en el número de Biot.

### Apartado 13

A partir de las ecuaciones obtenidas en el apartado 4 y 5 se calcula:

$$\begin{aligned} \dot{q}_e &= 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot h_e \cdot (T_e - T_\infty) = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot 56,47 \cdot (32,98 - 30) \\ \dot{q}_e &= 211,7 \text{ W/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot h_i \cdot (T_i - T_\infty) = 2 \cdot \pi \cdot 0,1 \cdot 64,87 \cdot (500 - 30) \\ \dot{q}_i &= 19155,9 \text{ W/m} \end{aligned}$$

$$q^* = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_i} = 0,011$$

Este resultado indica que el calor transferido cuando tenemos el aislante es dos órdenes de magnitud menor que el que tendríamos si la tubería estuviera directamente expuesta a la corriente de aire.

Para el cálculo del radio crítico adimensional usaremos la ecuación obtenida en el apartado 6.

$$(r_{e.cr}^*)^m = \frac{m}{Bi} \quad \Rightarrow \quad r_{e.cr}^* = \left(\frac{m}{Bi}\right)^{1/m}$$

$$r_{e.cr}^* = \left(\frac{0,8}{129,7}\right)^{1/0,8} = 1,73 \cdot 10^{-3}$$

Que el radio crítico adimensional sea menor que 1 significa que el radio que maximiza las pérdidas de calor sería menor que el radio de la tubería, lo cual es imposible, por lo tanto cualquier espesor de aislante disminuirá las pérdidas de calor.

El radio crítico se puede calcular como:

$$r_{e.cr} = r_{e.cr}^* \cdot r_i = 1,73 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1$$

$$r_{e.cr} = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

## Apartado 14

En este apartado hay que repetir los cálculos del apartado 12 y 13, pero considerando en este caso un aislante con una conductividad mayor (y por tanto peor aislante) y una velocidad del aire extremadamente baja.

$$Re_{D_i} = \frac{u \cdot 2 \cdot r_i}{\nu_{ai}} = \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 0,1}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 625$$

$$Re_{D_e} = \frac{u \cdot 2 \cdot r_e}{\nu_{ai}} = \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 0,2}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 1250$$

$$Nu_{D_i} = C \cdot Re_{D_i}^m \cdot Pr^{1/3} = 0,027 \cdot 625^{0,8} \cdot 0,7^{1/3} = 4,13$$

$$\text{Nu}_{D_e} = C \cdot \text{Re}_{D_e}^m \cdot \text{Pr}^{1/3} = 0,027 \cdot 1250^{0,8} \cdot 0,7^{1/3} = 7,20$$

A partir de los números de Nusselt se pueden calcular los coeficientes de película.

$$h_i = \frac{\text{Nu}_{D_i} \cdot k_{ai}}{2 \cdot r_i} = \frac{4,13 \cdot 0,026}{2 \cdot 0,1} = 0,54 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$h_e = \frac{\text{Nu}_{D_e} \cdot k_{ai}}{2 \cdot r_e} = \frac{7,20 \cdot 0,026}{2 \cdot 0,2} = 0,47 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Al igual que en el apartado anterior calculamos el número de Biot y los parámetros adimensionales.

$$\text{Bi} = \frac{h_i \cdot r_i}{k} = \frac{0,54 \cdot 0,1}{0,1} = 0,54$$

$$h_e^* = \frac{h_e}{h_i} = \frac{0,47}{0,54} = 0,87 \quad \text{y} \quad r_e^* = \frac{r_e}{r_i} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

Para este caso el valor del número de Biot nos indica que el gradiente de temperatura dentro del aislante será más pequeño, por lo que es de esperar que la temperatura en la pared del aislante sea mayor que la obtenida en el apartado 12.

El menor valor del número de Biot se debe por un lado a la disminución considerable del coeficiente de película y por otro al aumento en la conductividad del aislante.

Al igual que antes, utilizamos la ecuación del campo de temperaturas adimensional caracterizada para  $r = r_e$ .

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + \text{Bi} \cdot r_e^* \cdot h_e^* \cdot \ln r_e^*}$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$\theta(r_e) = \frac{1}{1 + 0,54 \cdot 2 \cdot 0,87 \cdot \ln 2} = 0,6065$$

$$T_e = \theta(r_e) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,6065 \cdot (500 - 30) + 30 = 315,1^\circ\text{C}$$

Como era de esperar la temperatura de la pared exterior del aislante en este caso es mucho más alta que la calculada en el apartado 12.

Para los cálculos de los flujos de calor utilizamos los nuevos datos y se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{q}_e &= 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot h_e \cdot (T_e - T_\infty) = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot 0,47 \cdot (315,1 - 30) \\ \dot{q}_e &= 167,63 \text{ W/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot h_i \cdot (T_i - T_\infty) = 2 \cdot \pi \cdot 0,1 \cdot 0,54 \cdot (500 - 30) \\ \dot{q}_i &= 157,73 \text{ W/m}\end{aligned}$$

$$q^* = \frac{\dot{q}_e}{\dot{q}_i} = 1,056$$

Este resultado indica que el calor transferido cuando tenemos el aislante es mayor que el que tendríamos si la tubería estuviera directamente expuesta a la corriente de aire, ésto indica que al colocar aislante estamos aumentando el flujo de calor respecto al que tendríamos sin él.

Para el cálculo del radio crítico adimensional que hace máximo este flujo de calor usaremos la ecuación obtenida en el apartado 6.

$$r_{e.cr}^* = \left(\frac{m}{Bi}\right)^{1/m} = \left(\frac{0,8}{0,54}\right)^{1/0,8} = 1,64$$

Que el radio crítico adimensional sea mayor que 1 significa que el radio que maximiza las pérdidas de calor es mayor que el radio de la tubería, lo que implica que hay un espesor del aislante que maximiza el flujo de calor.

El radio crítico se puede calcular como:

$$\begin{aligned}r_{e.cr} &= r_{e.cr}^* \cdot r_i = 1,64 \cdot 0,1 \\ r_{e.cr} &= 0,164 \text{ m}\end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el radio de la tubería es 0,1 m, el espesor de aislante que maximiza el flujo de calor es en este caso 0,064 m (6,4 cm).

## Apartado 15

Con los números de Reynolds obtenidos en el apartado anterior los coeficientes para la ecuación de Hilpert ya no son válidos, en este caso habría que usar los siguientes coeficientes:

Para Reynolds desde 40 a 4000  $\rightarrow C = 0,683$  y  $m = 0,466$

Utilizando estos coeficientes se obtiene un coeficiente de película  $h_e$  y  $h_i$  del orden de 1 y 1,5 respectivamente y un número de Biot igual a 1,54. Estos resultados expresados de esta forma parecen no diferir demasiado en los calculados con los coeficientes erróneos, sin embargo, cuando se calcula la temperatura exterior del aislante y el radio crítico los resultados cambian drásticamente.

La temperatura exterior en este caso es del orden de 215°C unos 100°C menos que antes y para el caso del radio crítico, estamos en condiciones similares a la del apartado 13, es decir el radio crítico adimensional  $r_{e.cr}^*$ , es menor que 1 y por lo tanto cualquier espesor de aislante que utilicemos disminuirá el flujo de calor.

Por otra parte la ecuación de Hilpert es válida para problemas donde el mecanismo dominante es el de convección forzada, sin embargo, hay que preguntarse en este caso concreto, donde la velocidad del aire es tan baja, si es este el mecanismo dominante, o si por el contrario, es la convección natural la que domina. Para ello existe un estimador definido como  $Gr/Re^2$ , donde Gr es el número de Grashof. Si este cociente tiene un valor mayor que uno el mecanismo dominante es el de convección natural.

Para estimar este parámetro se calculará el número de Grashof de acuerdo a su definición.

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot L_c^3 \cdot (T_e - T_\infty)}{\nu_{ai}^2}$$

Asumiendo que la temperatura de la pared del aislante es 215°C, que es la temperatura que obtendríamos si se usaran los coeficientes correctos en la ecuación de Hilpert y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica, que se puede calcular para el aire como  $1/T_\infty$  (la temperatura en Kelvin). La longitud característica en este caso es el diámetro exterior.

$$Gr = \frac{g \cdot d_e^3 \cdot (T_e - T_\infty)}{T_\infty \cdot \nu_{ai}^2} = \frac{9,8 \cdot 0,4^3 \cdot (215 - 30)}{303 \cdot (1,6 \cdot 10^{-5})^2} = 1,496 \cdot 10^9$$

Calculando ahora el estimador  $Gr/Re^2$ .

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} = \frac{1,496 \cdot 10^9}{1250^2} = 957,4$$

Teniendo en cuenta que este número es mucho mayor que 1, el fenómeno dominante es la convección natural, por lo tanto, el número de Nusselt habría que estimarlo con alguna correlación más apropiada a las nuevas condiciones del problema, como las propuestas por Churchill y Chu o Morgan.



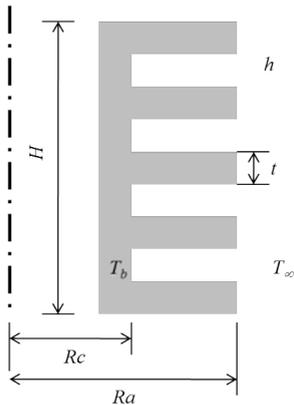
## Capítulo 4

# Transferencia de calor en superficies extendidas



## 4.1 Cilindro de motor con aletas

El cilindro del motor de un UAV está construido de aleación de aluminio 2024-T6. Su altura es de  $H = 0,15$  m y el radio exterior es  $R_c = 25$  mm. En condiciones de operación típicas la temperatura de la superficie exterior del cilindro es de 500 K y la temperatura del aire ambiente  $T_\infty = 300$  K, con un coeficiente de película de  $h = 50$  W/m<sup>2</sup> · K. El cilindro incorpora aletas anulares para incrementar la cantidad de calor transferida. Considérese que el cilindro tiene cinco aletas equiespaciadas (como se muestra en la figura) de espesor  $t = 6$  mm y radio exterior  $R_a = 25$  mm.



Conductividad del aluminio:

$$k = 186 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Suponer:

Condiciones estacionarias.

Flujo de calor unidimensional en la aleta.

Coeficiente de película  $h$  es constante (con y sin aletas).

Se pide:

1. Calcular el flujo de calor por unidad de tiempo transferido por la superficie del cilindro en el caso de que no hubiera aletas
2. Hallar el rendimiento global de la superficie aletada
3. Calcular el incremento en el calor transferido debido a las aletas.

### Apartado 1

El flujo de calor por unidad de tiempo transferido por la superficie del cilindro cuando no hay aletas es el transferido por convección entre la pared del cilindro al aire circundante.

$$\dot{q} = h \cdot A \cdot (T_b - T_\infty)$$

Donde  $A$  es el área de transferencia de calor  $A = 2 \cdot \pi \cdot R_a \cdot H$ .

Sustituyendo  $A$  y reemplazando valores se obtiene:

$$\dot{q} = h \cdot 2 \cdot \pi \cdot Ra \cdot H \cdot (T_b - T_\infty)$$

$$\dot{q} = 50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,025 \cdot 0,15 \cdot (500 - 200) = 235,6 \text{ W}$$

## Apartado 2

El rendimiento global de una superficie aletada se define como:

$$\eta_g = 1 - \left[ (1 - \eta_a) \cdot \frac{A_{aleta}}{A_{TOT}} \right]$$

Donde  $A_{aleta}$  es el área de transferencia de calor de todas las aletas,  $A_{TOT}$  es el área total (aletas más área libre entre aletas) y  $\eta_a$  es el rendimiento de una aleta individual.

Se procederá a continuación con el cálculo de cada uno de los términos para luego poder calcular el rendimiento global de la superficie aleteada.

Área de aletas:

$$A_{aleta} = N_a \cdot [2 \cdot \pi \cdot (Ra^2 - Rc^2) + 2 \cdot \pi \cdot Ra \cdot t]$$

Siendo  $N_a$  el número de aletas. Reemplazando valores, se obtiene:

$$A_{aleta} = 5 \cdot [2 \cdot \pi \cdot (0,045^2 - 0,025^2) + 2 \cdot \pi \cdot 0,045 \cdot 0,006] = 0,0525 \text{ m}^2$$

Área total:

$$A_{TOT} = A_{aleta} + 2 \cdot \pi \cdot Rc \cdot H_{sin \ aletas}$$

Siendo  $H_{sin \ aletas} = H - (N_a \cdot t)$  el espacio libre total. Reemplazando valores, se obtiene:

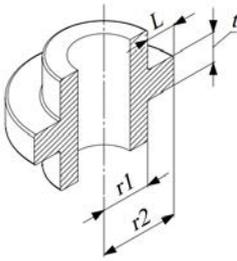
$$A_{TOT} = 0,0525 + 2 \cdot \pi \cdot 0,025 \cdot (0,15 - (5 \cdot 0,006)) = 0,0714 \text{ m}^2$$

Rendimiento de la aleta:

Para este caso, aleta anular de sección transversal constante, la ecuación para el cálculo de  $\eta_a$  es:

$$\eta_a = \frac{2 \cdot r_1 / m}{r_{2c}^2 - r_1^2} \cdot \frac{K_1(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_{2c}) - I_1(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_{2c})}{I_0(m \cdot r_1) \cdot K_1(m \cdot r_{2c}) - K_0(m \cdot r_1) \cdot I_1(m \cdot r_{2c})}$$

Donde  $K$  e  $I$  son funciones de Bessel modificadas de orden 0 y 1. Los valores de  $r_1$ ,  $r_{2c}$  y  $m$ , se pueden calcular siguiendo la nomenclatura de la siguiente figura.



$$m = \sqrt{2 \cdot h/k \cdot t} = \sqrt{2 \cdot 50/186 \cdot 0,006} = 9,47$$

$$r_{2c} = r_2 + t/2 = 0,045 + 0,006/2 = 0,048$$

$$r_1 = 0,025$$

$$m \cdot r_1 = 0,0568$$

$$m \cdot r_{2c} = 0,4544$$

Con los parámetros obtenidos, se hallan los valores de las funciones de Bessel.

$$K_0(m \cdot r_1) = K_0(0,0568) = 1,59 \quad I_0(m \cdot r_1) = I_0(0,0568) = 1,01$$

$$K_1(m \cdot r_1) = K_1(0,0568) = 3,98 \quad I_1(m \cdot r_1) = I_1(0,0568) = 0,12$$

$$K_1(m \cdot r_{2c}) = K_1(0,4544) = 1,87 \quad I_1(m \cdot r_{2c}) = I_1(0,4544) = 0,23$$

Reemplazando valores en la ecuación del rendimiento de la aleta, se obtiene:

$$\eta_a = \frac{2 \cdot 0,025/9,47}{0,048^2 - 0,025^2} \cdot \frac{3,98 \cdot 0,23 - 0,12 \cdot 1,87}{1,01 \cdot 1,87 - 1,59 \cdot 0,23} = 0,9786$$

Con el rendimiento de una aleta y las áreas ya calculada se obtiene el rendimiento global ( $\eta_g$ ) de la superficie aleteada.

$$\eta_g = 1 - \left[ (1 - \eta_a) \cdot \frac{A_{aleta}}{A_{TOT}} \right] = 1 - \left[ (1 - 0,9786) \cdot \frac{0,0525}{0,0714} \right] = 0,9842$$

### Apartado 3

Finalmente el flujo de calor cuando se considera el cilindro con las aletas se puede expresar de la misma forma que en el apartado 1, con la diferencia que el área de transferencia es el área total incluidas las aletas  $A_{TOT}$ , ponderada por el rendimiento global  $\eta_g$  de la superficie aleteada.

$$\dot{q} = h \cdot A_{TOT} \cdot \eta_g \cdot (T_b - T_\infty)$$

Reemplazando los valores obtenidos en el apartado anterior:

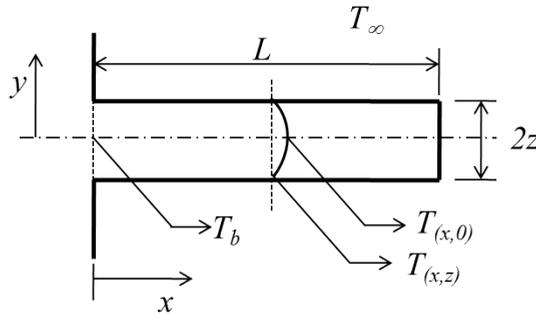
$$\dot{q} = 50 \cdot 0,0714 \cdot 0,9842 \cdot (500 - 300) = 702,7 \text{ W}$$

Como puede observarse el flujo de calor se ha incrementado en un factor de 3 respecto al caso del cilindro sin aletas.

## 4.2 Distribución de temperatura en una aleta rectangular

Se supone una aleta de sección rectangular de un material con conductividad térmica  $k$  que soporta un flujo térmico en dirección longitudinal e intercambia calor con el fluido ambiente con un coeficiente de película  $h$ . Se asume que la distribución de temperatura transversal a la aleta en cualquier sección  $x$  se puede aproximar por una ecuación de la forma (ver figura para la nomenclatura):

$$\frac{T_{(x,y)} - T_{(x,0)}}{T_{(x,z)} - T_{(x,0)}} = \left(\frac{y}{z}\right)^2$$



Se pide:

1. Determinar el gradiente de temperatura transversal ( $dT_{(x,y)}/dy$ ), particularizado para  $y = z$  y escribir una expresión para determinar el flujo de calor por unidad de área transmitida por conducción en la superficie y en la dirección del eje  $y$ , en función de  $T_{(x,z)}$  y  $T_{(x,0)}$ .
2. Haciendo uso de la ley de Fourier y la ley de enfriamiento de Newton identificar que parámetros controlan el cociente:

$$\frac{T_{(x,0)} - T_{(x,z)}}{T_{(x,z)} - T_{\infty}}$$

Es decir, el salto transversal de temperatura en la aleta respecto del salto de temperatura con el fluido ambiente.

3. Cómo deben modificarse los parámetros identificados en el apartado anterior para que el salto de temperatura en sentido transversal sea pequeño comparado con el salto de temperatura entre la aleta y el fluido.

4. Particularizar el valor del cociente del apartado 2 para el caso de  $h = 50 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y  $z = 1 \text{ cm}$ , considerando la aleta de dos materiales diferentes:

Aluminio:  $k_{al} = 237 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

Acero Inoxidable:  $k_{ac} = 15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

5. Con la hipótesis de aleta infinitamente larga, determinar una expresión para el gradiente de temperatura en sentido longitudinal en el eje de la aleta ( $dT_{(x,0)}/dx$ ), en función de  $T_{(x,0)}$  y  $T_\infty$ . Comprobar que el gradiente máximo ocurre en la base de la aleta y es nulo en el extremo.
6. Determinar el cociente entre el gradiente de temperatura longitudinal en el eje de la aleta obtenido en el apartado 5 y el gradiente de temperatura transversal en la superficie de la aleta obtenido en el apartado 1. Considerar que el ancho de la aleta es  $w \gg z$ .
7. Demostrar que el cociente obtenido en el apartado 5 no depende de la longitud  $x$  a la que se evalúa si aceptamos que:

$$\frac{T_{(x,0)} - T_\infty}{T_{(x,z)} - T_\infty} \sim 1$$

8. Determinar una expresión para el rendimiento de una aleta con la hipótesis de aleta infinitamente larga con  $w \gg z$  en función del número adimensional obtenido en el apartado anterior.

### Apartado 1

A partir de la distribución de temperatura transversal dada en el enunciado, se puede obtener:

$$\frac{T_{(x,y)} - T_{(x,0)}}{T_{(x,z)} - T_{(x,0)}} = \left(\frac{y}{z}\right)^2$$

$$T_{(x,y)} = \left(\frac{y}{z}\right)^2 \cdot (T_{(x,z)} - T_{(x,0)}) + T_{(x,0)}$$

Derivando respecto a  $y$ , se obtiene el gradiente de temperatura transversal.

$$\frac{dT_{(x,y)}}{dy} = \frac{2 \cdot y}{z^2} \cdot (T_{(x,z)} - T_{(x,0)})$$

Particularizando para  $y = z$  se obtiene:

$$\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z} = \frac{2}{z} \cdot (T_{(x,z)} - T_{(x,0)})$$

Aplicando la ecuación de Fourier en la dirección del eje  $y$ , se obtiene el flujo de calor por unidad de superficie.

$$\dot{q}_{y.cond} = -k \cdot \frac{dT_{(x,y)}}{dy}$$

$$\dot{q}_{y.cond} = -k \cdot \frac{2 \cdot y}{z^2} \cdot (T_{(x,z)} - T_{(x,0)})$$

Particularizado para  $y = z$ , es decir, para la superficie de la aleta, el flujo de calor por conducción por unidad de superficie es:

$$\dot{q}_{y.cond} = -k \cdot \frac{2}{z} \cdot (T_{(x,z)} - T_{(x,0)})$$

## Apartado 2

En el apartado anterior se ha calculado el flujo de calor por conducción a partir de la ley de Fourier, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\dot{q}_{y.cond} = k \cdot \frac{2}{z} \cdot (T_{(x,0)} - T_{(x,z)})$$

Este flujo de calor debe ser igual al flujo de calor intercambiado por convección en la superficie, que se puede calcular a partir de la ley de enfriamiento de Newton.

$$\dot{q}_{y.conv} = h \cdot (T_{(x,z)} - T_{\infty})$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene:

$$k \cdot \frac{2}{z} \cdot (T_{(x,0)} - T_{(x,z)}) = h \cdot (T_{(x,z)} - T_{\infty})$$

De esta igualdad se obtiene el cociente que caracteriza el salto transversal de temperatura en la aleta respecto del salto de temperatura con el fluido ambiente.

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot z}{k}$$

Donde el término de la derecha es el número de Biot, si consideramos como longitud característica la mitad del espesor de la aleta.

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot z}{k}$$

Por tanto la expresión del salto de temperaturas queda sólo en función del número de Biot del problema:

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = \frac{\text{Bi}}{2}$$

### Apartado 3

Para que el cociente obtenido en el apartado anterior sea pequeño, es decir, el salto de temperaturas en el interior de la aleta es pequeño comparado con el salto de temperatura entre la aleta y el fluido, el número de Biot del problema debe ser lo más bajo posible.

Un número de Biot bajo se obtiene cuando:

- El coeficiente de película  $h$  es bajo, sin embargo en la práctica este valor viene condicionado por las condiciones del problema y es difícil actuar sobre él.
- El espesor de la aleta  $2z$  es pequeño, este es un parámetro a tener en cuenta cuando se diseñan las aletas para un determinado problema.
- La conductividad térmica del material  $k$  es grande. Se deben usar materiales que cumplan con esta condición.

### Apartado 4

Reemplazando valores para el aluminio y el acero inoxidable en la ecuación obtenida en el apartado 2 se obtienen los siguientes valores:

Aluminio:

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot z}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 \cdot 0,01}{237}$$

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = 1,05 \cdot 10^{-3}$$

Acero inoxidable:

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot z}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 \cdot 0,01}{15}$$

$$\frac{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})} = 1,66 \cdot 10^{-2}$$

Como se observa el valor del cociente es menor cuando se utiliza un material con mejor conductividad, sin embargo, en ambos casos se puede considerar que el salto de temperaturas en el interior de la aleta es despreciable respecto al salto de temperaturas entre la aleta y el fluido.

## Apartado 5

Para una aleta infinitamente larga la distribución de temperatura a lo largo del eje de la aleta se puede obtener a partir de la ecuación siguiente:

$$\theta_{(x,0)} = \theta_b \cdot e^{-mx}$$

Donde:  $\theta_{(x,0)} = T_{(x,0)} - T_{\infty}$  ;  $\theta_b = T_b - T_{\infty}$  ;  $m = \sqrt{h \cdot P/k \cdot A}$

Siendo:  $P$  el perímetro y  $A$  el área transversal de la aleta.

Por tanto de la ecuación anterior se puede obtener la distribución de temperatura en el eje como:

$$T_{(x,0)} = (T_b - T_{\infty}) \cdot e^{-mx} + T_{\infty}$$

Derivando esta expresión respecto a  $x$  se puede obtener el gradiente de temperatura en sentido longitudinal en el eje de la aleta ( $y = 0$ ).

$$\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0} = (T_b - T_\infty) \cdot e^{-mx} \cdot (-m)$$

Teniendo en cuenta la ecuación del campo de temperaturas, el gradiente de temperaturas longitudinal se puede escribir como:

$$\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0} = \theta(x) \cdot (-m)$$

$$\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0} = -m \cdot (T_{(x,0)} - T_\infty)$$

Teniendo en cuenta que el valor de  $m$  es constante para un problema dado, se puede concluir que:

- Para  $x = 0$ , la temperatura en este punto es la temperatura de la base  $T_{(0,0)} = T_b$ , y por lo tanto el gradiente será máximo.
- Para  $x = L$ , la temperatura en este punto es la temperatura del fluido (condición de aleta infinitamente larga)  $T_{(L,0)} = T_\infty$ , y por lo tanto el gradiente será nulo.

## Apartado 6

El gradiente longitudinal, para  $y = 0$ , obtenido en el apartado anterior y el gradiente transversal caracterizado para  $y = z$ , obtenido en el apartado 1 se expresan como:

$$\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0} = -m \cdot (T_{(x,0)} - T_\infty)$$

$$\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z} = -\frac{2}{z} \cdot (T_{(x,0)} - T_{(x,z)})$$

Haciendo el cociente entre ambos se obtiene:

$$\frac{\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0}}{\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z}} = \frac{z \cdot m}{2} \cdot \frac{(T_{(x,0)} - T_\infty)}{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})} = \frac{z \cdot \sqrt{h \cdot P/k \cdot A}}{2} \cdot \frac{(T_{(x,0)} - T_\infty)}{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}$$

El perímetro  $P$  y el área transversal de la aleta  $A$  se pueden calcular como:

$$P = 2 \cdot (2 \cdot z + w) \quad \text{y} \quad A = 2 \cdot z \cdot w$$

Haciendo el cociente  $P/A$  y teniendo en cuenta que  $w \gg z$ , se obtiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{2}{w} + \frac{1}{z} \approx \frac{1}{z}$$

Reemplazando  $P/A$  en la ecuación del gradiente y operando convenientemente, se obtiene:

$$\frac{\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0}}{\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z}} = \frac{\sqrt{h \cdot z/k}}{2} \cdot \frac{(T_{(x,0)} - T_{\infty})}{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}$$

$$\frac{\left. \frac{dT_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0}}{\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z}} = \frac{\sqrt{\text{Bi}}}{2} \cdot \frac{(T_{(x,0)} - T_{\infty})}{(T_{(x,0)} - T_{(x,z)})}$$

## Apartado 7

De la expresión obtenida en el apartado 2, se puede obtener:

$$(T_{(x,0)} - T_{(x,z)}) = (T_{(x,z)} - T_{\infty}) \cdot \frac{\text{Bi}}{2}$$

Reemplazando en el cociente obtenido en el apartado anterior.

$$\frac{\left. \frac{T_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0}}{\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z}} = \frac{\sqrt{\text{Bi}}}{2} \cdot \frac{2}{\text{Bi}} \cdot \frac{(T_{(x,0)} - T_{\infty})}{(T_{(x,z)} - T_{\infty})}$$

Operando y teniendo en cuenta que el cociente de temperaturas se puede considerar igual a 1 de acuerdo con el enunciado.

$$\frac{\left. \frac{T_{(x,0)}}{dx} \right|_{y=0}}{\left. \frac{dT_{(x,y)}}{dy} \right|_{y=z}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Bi}}}$$

Por tanto el cociente entre el gradiente longitudinal y el gradiente transversal de temperatura sólo depende del número de Biot.

En la medida que el número de Biot sea pequeño el cociente será grande, lo que significa que el gradiente longitudinal es mucho mayor que el gradiente transversal en la aleta. Ésto sostiene la hipótesis de considerar flujo de calor unidimensional sólo en la dirección del eje longitudinal de la aleta.

### Apartado 8

Para una aleta infinitamente larga el flujo de calor de la aleta se puede obtener a partir de la ecuación siguiente:

$$\dot{q}_{aleta} = \dot{q}_{sin.aleta} \cdot (m \cdot k/h) = h \cdot \theta_b \cdot A \cdot (m \cdot k/h)$$

A partir de la definición del rendimiento de una aleta se puede expresar:

$$\eta = \frac{\dot{q}_{aleta}}{\dot{q}_{aleta.ideal}} = \frac{h \cdot \theta_b \cdot (m \cdot k/h)}{h \cdot \theta_b \cdot S}$$
$$\eta = \frac{A}{S} \cdot \frac{m \cdot k}{h}$$

Donde  $A$  es el área transversal de la aleta y  $S$  es toda la superficie de la aleta.

$$A = 2 \cdot w \cdot z$$
$$S = P \cdot L = (4 \cdot z + 2 \cdot w) \cdot L$$

Si se acepta que  $w \gg z$ , la expresión de la superficie de la aleta queda:

$$S \approx 2 \cdot w \cdot L$$

Reemplazando en la ecuación del rendimiento.

$$\eta = \frac{2 \cdot w \cdot z}{2 \cdot w \cdot L} \cdot \frac{m \cdot k}{h} = \frac{z}{L} \cdot \frac{m \cdot k}{h}$$

Reemplazando el valor de  $m$  y el cociente de  $P/A$  obtenido en el apartado 6.

$$\eta = \frac{z}{L} \cdot \frac{\sqrt{\frac{h}{k} \cdot \frac{P}{A}} \cdot k}{h} = \frac{z}{L} \cdot \frac{\sqrt{\frac{h}{k} \cdot \frac{1}{z}} \cdot k}{h}$$

Operando convenientemente se puede obtener:

$$\eta = \frac{z}{L} \cdot \sqrt{\frac{h}{k} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{k^2}{h^2}} = \frac{z}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Bi}}}$$

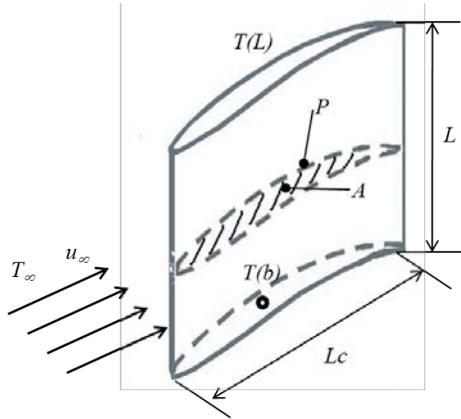
Expresión equivalente a la que se encuentra en los libros de texto.

$$\eta = \frac{z}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Bi}}} = \frac{1}{m \cdot L}$$

Como se observa en la ecuación si la longitud de la aleta  $L$  es demasiado grande el rendimiento tiende a cero. Sin embargo, esta ecuación no tiene sentido si  $L$  es pequeña (podría dar valores mayores que 1) ya que la temperatura en el extremo de la aleta no se puede considerar la del fluido y por lo tanto la expresión para calcular el flujo de calor utilizada al comienzo de este apartado no es la adecuada.

### 4.3 Alabe de una turbina de gas

Un álabe que forma parte de un rotor de una turbina de gas está expuesto a una corriente de productos de la combustión con una temperatura  $T_\infty = 1200^\circ\text{C}$  y una velocidad  $u_\infty = 200 \text{ m/s}$ .



El álabe esquematizado en la figura, tiene las siguientes dimensiones geométricas:

Altura del álabe:	$L = 0,05 \text{ m}$
Perímetro del álabe:	$P = 0,22 \text{ m}$
Cuerda del álabe:	$L_c = 0,1 \text{ m}$
Sección lateral expuesta:	$A_L = L \cdot P = 0,011 \text{ m}^2$
Sección transversal del álabe:	$A = 0,0006 \text{ m}^2$

Las condiciones termodinámicas y las propiedades del fluido se consideran constantes y tienen los siguientes valores:

$T_\infty = 1200^\circ\text{C}$	$k_\infty = 0,1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
$\rho_\infty = 1,66 \text{ kg/m}^3$	$\nu_\infty = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$
$Pr = 0,685$	

#### Primera parte

En esta primera parte suponemos que la temperatura del álabe  $T_p$  es constante e igual a  $850^\circ\text{C}$  y asimilamos el álabe a una placa plana de dimensiones  $L_c \cdot L$  ( $\text{m}^2$ ).

Se pide:

1. En ensayos aerodinámicos se ha obtenido para este tipo de álabe un coeficiente de fricción  $C_f = 0,005$ . A partir de la analogía de Chilton-Colburn estimar el valor del número de Nusselt, tomando la cuerda del álabe como dimensión característica ( $Nu_{L_c,CC}$ ).

2. Determinar el valor del coeficiente de película  $h_{CC}$ .
3. A la vista del número de Reynolds ( $Re_{L_c}$ ) empleado en el apartado 1, decidir si la capa límite desarrollada en el álabe es laminar en todo  $L_c$ , o bien se transforma en turbulenta.
4. De acuerdo con la contestación al apartado 3, elegir una correlación empírica o ecuación teórica para estimar el valor de  $Nu_{L_c}$  y del coeficiente de película  $h$ . Comparar con los valores obtenidos en los apartados 1 y 2. Comentar la analogía/diferencia en el resultado.
5. Determinar el calor intercambiado entre el gas y el álabe  $\dot{q}$  [W] y el calor intercambiado por unidad de superficie  $\dot{q}/A_L$  [W/m<sup>2</sup>] utilizando los valores obtenidos en el apartado 4.
6. Rellenar una tabla como la que aparece a continuación, justificando los valores obtenidos o el procedimiento para obtenerlos, y compararlos con los datos obtenidos en los apartados 4 y 5.

	Re	$Re_{L_c}$	$h$	$\dot{q}$	$\dot{q}/A_L$
$u_\infty \uparrow 20\%$					
$L_c \downarrow 20\%$					
$u_\infty \uparrow 20\%$ y $L_c \downarrow 20\%$					
$(T_\infty - T_p) \uparrow 20\%$					

Nota: Cuando modificamos la longitud  $L_c$ , la longitud  $L$  y el perímetro  $P$  se modifican en la misma proporción ( semejanza geométrica)

## Segunda parte

En esta segunda parte del ejercicio no suponemos la temperatura del álabe constante y no asimilamos el álabe a una placa plana. Se considera como una aleta de sección constante. Emplear el coeficiente de película del apartado 4.

7. Suponiendo que el álabe está fabricado de Inconel con una conductividad térmica  $k = 20$  W/m·K y que el rotor está diseñado con un sistema de refrigeración que garantiza que la temperatura en la base del álabe es de  $T(b) = 300^\circ\text{C}$ , comprobar si la temperatura del álabe  $T(L)$  no supera los  $1100^\circ\text{C}$ , que es la temperatura máxima admisible para este material y esta aplicación. Comentar el resultado obtenido. Suponer el álabe como una aleta de extremo adiabático.
8. Con las hipótesis del apartado anterior, determinar el flujo de calor evacuado por el sistema de refrigeración del álabe.
9. Determinar la cantidad de calor que se intercambia por convección por el extremo del álabe suponiendo que el valor de  $h$  es el obtenido en el apartado

4 y  $T(L)$  la obtenida en el apartado 7. Comparar el valor obtenido con el valor de calor total evacuado obtenido en el apartado anterior y discutir la validez de la hipótesis de extremo adiabático realizada en el apartado 7.

10. Demostrar que el flujo de calor total intercambiado por el fluido y el álabe obtenido en el apartado 8 coincide esencialmente con el obtenido con una expresión de la forma:

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - \overline{T}_p)$$

Tomando una definición adecuada del valor de la temperatura media de la pared  $\overline{T}_p$  del álabe.

Estimar el error cometido si adoptamos para  $\overline{T}_p$  un valor sencillo como  $[T(L) + T(b)]/2$ .

## Apartado 1

La analogía de Chilton-Colburn permite estimar el número de Nusselt en condiciones laminares. Dicha analogía establece que:

$$\text{Nu} = \frac{C_f}{2} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Se debe calcular el número de Reynolds para la condiciones del problema, utilizando como longitud característica la cuerda del álabe  $L_C$ .

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \cdot L_C}{\nu_\infty} = \frac{200 \cdot 0,1}{0,24 \cdot 10^{-3}} = 83333,3$$

Reemplazando valores en la analogía de Chilton-Colburn, se obtiene:

$$\text{Nu} = \frac{0,005}{2} \cdot 83333,3 \cdot 0,685^{1/3} = 183,65$$

## Apartado 2

El coeficiente de película  $h$  se puede hallar a partir de la definición del número de Nusselt.

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot L_C}{k_\infty} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\text{Nu} \cdot k_\infty}{L_C}$$

$$h = \frac{183,65 \cdot 0,1}{0,1} = 183,65 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

### Apartado 3

Para placas planas se establece que existe flujo laminar para valores de número de Reynolds menores de  $10^5$  y se puede considerar flujo turbulento para Reynolds mayores de  $10^8$ . Para valores intermedios de número de Reynolds el flujo se puede considerar mixto laminar/turbulento.

Para el caso de este problema  $Re = 8,3 \cdot 10^4 < 10^5$  se puede considerar que la capa límite desarrollada en el álabe es laminar en todo  $L_C$ .

### Apartado 4

Teniendo en cuenta que el flujo es laminar la correlación que se puede utilizar es:

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{1/3}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$Nu = 0,664 \cdot 83333,3^{0,5} \cdot 0,685^{1/3} = 168,97$$

A partir del número de Nusselt se despeja el valor de  $h$ .

$$Nu = \frac{h \cdot L_C}{k_\infty} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{Nu \cdot k_\infty}{L_C}$$

$$h = \frac{168,97 \cdot 0,1}{0,1} = 168,97 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

### Apartado 5

Suponiendo la temperatura del álabe (placa) constante e igual a  $850^\circ\text{C}$ , el flujo de calor se puede calcular, de acuerdo a la ley de Newton del enfriamiento.

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot \Delta T$$

Donde el área es el área lateral expuesta  $A_L$  y las temperaturas son la de la corriente del gas  $T_\infty$  y la temperatura de la pared  $T_p$ .

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - T_p) = 168,97 \cdot 0,011 \cdot (1200 - 850)$$

$$\dot{q} = 650,5 \text{ W}$$

Siendo el flujo por unidad de área:

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = h \cdot (T_\infty - T_p) = 168,97 \cdot (1200 - 850)$$

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = 59139,5 \text{ W/m}^2$$

## Apartado 6

Para completar la tabla hay que recalcular los valores en los apartados 4 y 5, teniendo en cuenta el efecto de la variación del parámetro propuesto.

- Incremento de la velocidad  $u_\infty \uparrow 20\%$  (240 m/s)

Un incremento en la velocidad solo tiene un efecto directo sobre el número de Reynolds, incrementando este en la misma proporción, por tanto se debe recalcular el número de Reynolds y a partir de ahí el resto de parámetros a evaluar.

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \cdot L_C}{\nu_\infty} = \frac{240 \cdot 0,1}{0,24 \cdot 10^{-3}} = 100000$$

$$\text{Nu} = 0,664 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} = 0,664 \cdot 100000^{0,5} \cdot 0,685^{1/3} = 185,10$$

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k_\infty}{L_C} = \frac{185,10 \cdot 0,1}{0,1} = 185,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - T_p) = 185,1 \cdot 0,011 \cdot (1200 - 850) = 712,6 \text{ W}$$

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = h \cdot (T_\infty - T_p) = 185,1 \cdot (1200 - 850) = 64783,8 \text{ W/m}^2$$

- Disminución de la cuerda del álabe  $L_C \downarrow 20\%$  (0,08 m)

Una disminución en la cuerda del álabe tiene influencia sobre todas las otras magnitudes geométricas, además del número de Reynolds y el resto de parámetros, ya que cambia la longitud característica del problema.

La longitud y el perímetro del alabe ahora son ahora el 20% más pequeños,  $L = 0,04$  m y  $P = 0,176$  m, y por tanto el área lateral expuesta será:

$$A_L = L \cdot P = 0,04 \cdot 0,176 = 7,04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

El resto de parámetros se pueden calcular con los nuevos datos geométricos, con lo que se obtiene:

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \cdot L_C}{\nu_\infty} = \frac{200 \cdot 0,08}{0,24 \cdot 10^{-3}} = 66666,7$$

$$\text{Nu} = 0,664 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Re}^{1/3} = 0,664 \cdot 66666,7^{0,5} \cdot 0,685^{1/3} = 151,13$$

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k_\infty}{L_C} = \frac{151,13 \cdot 0,1}{0,08} = 188,91 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - T_p) = 188,91 \cdot 7,04 \cdot 10^{-3} \cdot (1200 - 850) = 465,5 \text{ W}$$

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = h \cdot (T_\infty - T_p) = 188,91 \cdot (1200 - 850) = 66119,7 \text{ W/m}^2$$

- Incremento de la velocidad  $u_\infty \uparrow 20\%$  (240 m/s) y disminución de la cuerda del álabe  $L_C \downarrow 20\%$  (0,08 m)

Para evaluar los parámetros en este caso utilizamos los valores geométricos obtenidos en el apartado anterior.

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \cdot L_C}{\nu_\infty} = \frac{240 \cdot 0,08}{0,24 \cdot 10^{-3}} = 80000$$

$$\text{Nu} = 0,664 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Re}^{1/3} = 0,664 \cdot 80000^{0,5} \cdot 0,685^{1/3} = 165,56$$

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k_\infty}{L_C} = \frac{165,56 \cdot 0,1}{0,08} = 206,94 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - T_p) = 206,94 \cdot 7,04 \cdot 10^{-3} \cdot (1200 - 850) = 509,9 \text{ W}$$

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = h \cdot (T_\infty - T_p) = 206,94 \cdot (1200 - 850) = 72429,0 \text{ W/m}^2$$

- Aumento de  $(T_\infty - T_p) \uparrow 20\%$  ( $T_\infty - T_p = 420^\circ\text{C}$ )

Un incremento de la diferencia de temperaturas entre el gas y la pared despreciando el efecto que puede tener sobre las propiedades del gas, sólo afectará a los flujos térmicos. Por tanto el número de Reynolds, el de Nusselt y el coeficiente de película pueden considerarse invariantes.

$$\dot{q} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - T_p) = 168,97 \cdot 0,011 \cdot 420 = 780,6 \text{ W}$$

$$\frac{\dot{q}}{A_L} = h \cdot (T_\infty - T_p) = 168,97 \cdot 420 = 79067,4 \text{ W/m}^2$$

A continuación se presenta la tabla a modo de resumen mostrando las variaciones de los parámetros de forma porcentual, respecto al caso original.

	Re	Re <sub>Lc</sub>	h	$\dot{q}$	$\dot{q}/A_L$
$u_\infty \uparrow 20\%$	$\uparrow 20\%$	$\uparrow 9,5\%$	$\uparrow 9,5\%$	$\uparrow 9,5\%$	$\uparrow 9,5\%$
$L_c \downarrow 20\%$	$\downarrow 20\%$	$\downarrow 10,6\%$	$\uparrow 11,8\%$	$\downarrow 28,4\%$	$\uparrow 11,8\%$
$u_\infty \uparrow 20\%$ y $L_c \downarrow 20\%$	$\downarrow 4\%$	$\downarrow 2\%$	$\uparrow 22,5\%$	$\downarrow 21,6\%$	$\uparrow 22,5\%$
$(T_\infty - T_p) \uparrow 20\%$	~~~	~~~	~~~	$\uparrow 20\%$	$\uparrow 20\%$

## Apartado 7

Suponiendo ahora que el álabe se puede considerar como una aleta con un extremo adiabático, de acuerdo con la literatura la distribución de temperatura a lo largo del álabe se puede calcular como:

$$\theta(x) = \theta_b \cdot \frac{\cosh [m \cdot (L - x)]}{\cosh [m \cdot L]}$$

El parámetro  $m$  de la ecuación anterior se define como:

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot A}} = \sqrt{\frac{168,97 \cdot 0,22}{20 \cdot 0,0006}} = 55,66$$

Siendo,  $h$  el coeficiente de película calculado en el apartado 4,  $k$  la conductividad térmica del inonel,  $P$  el perímetro y  $A$  la sección transversal del álabe.

Caracterizando ahora la ecuación de distribución de temperaturas para  $x = L$  se puede obtener la temperatura en el extremo del álabe.

Para  $x = L = 0,05$  m:

$$\theta_b = T_\infty - T_b = 1200 - 300 = 900^\circ\text{C}$$

$$\cosh[m \cdot (L - x)] = \cosh[0] = 1$$

$$\cosh[m \cdot L] = \cosh[55,66 \cdot 0,05] = 8,114$$

Reemplazando valores en la ecuación de distribución de temperatura:

$$\theta(L) = T_\infty - T(L) = \theta_b \cdot \frac{\cosh[m \cdot (L - x)]}{\cosh[m \cdot L]} = 900 \cdot \frac{1}{8,114} = 110,92$$

Se puede calcular la temperatura en el extremo del alabe  $T(L)$  como:

$$T(L) = T_\infty - \theta(L) = 1200 - 110,92 = 1089,08^\circ\text{C}$$

Como puede verse la temperatura en el extremo del álabe no supera los  $1100^\circ\text{C}$ , máximo admisible para el material empleado.

## Apartado 8

El flujo de calor para una aleta con extremo adiabático se puede calcular como:

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = \sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A} \cdot \theta_b \cdot \tanh[m \cdot L]$$

Reemplazando valores en la ecuación:

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = \sqrt{168,97 \cdot 0,22 \cdot 20 \cdot 0,0006 \cdot 900} \cdot \tanh [55,66 \cdot 0,05]$$

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = 601,10 \cdot \tanh [55,66 \cdot 0,05]$$

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = 596,5 \text{ W}$$

### Apartado 9

La cantidad de calor que el álabe puede intercambiar por el extremo se puede calcular aplicando la ley del enfriamiento de Newton a la sección del álabe considerando como temperatura de la pared la calculada en el apartado 7.

$$\dot{q}_{\text{extremo}} = h \cdot A \cdot (T_{\infty} - T(L)) = 168,97 \cdot 0,0006 \cdot (1200 - 1089,08)$$

$$\dot{q}_{\text{extremo}} = 11,25 \text{ W}$$

De acuerdo al resultado obtenido se puede considerar como válida la suposición de extremo adiabático, ya que el calor intercambiado por el extremo representa menos del 2% del calor intercambiado por el álabe (resultado del apartado 8).

### Apartado 10

La forma de hallar una temperatura media  $\overline{T_P}$  es hacer la integral de la distribución de temperatura, ponderada para la longitud del álabe.

$$\overline{\theta(x)} = (T_{\infty} - \overline{T_P}) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \theta(x) \cdot dx$$

$$\overline{\theta(x)} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \theta_b \cdot \frac{\cosh [m \cdot (L - x)]}{\cosh [m \cdot L]} \cdot dx$$

Haciendo un cambio de variables.

$$y = (L - x) \quad ; \quad dy = -dx$$

Definiendo los límites de integración.

$$x = 0 \Rightarrow y = L$$

$$x = L \Rightarrow y = 0$$

La ecuación de  $\overline{\theta(x)}$  queda como:

$$\overline{\theta(x)} = \frac{1}{L} \cdot \int_L^0 \theta_b \cdot \frac{\cosh [m \cdot y]}{\cosh [m \cdot L]} \cdot -dy = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \theta_b \cdot \frac{\cosh [m \cdot y]}{\cosh [m \cdot L]} \cdot dy$$

Sacando fuera de la integral los términos que no depende de la variable  $y$ .

$$\overline{\theta(x)} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\theta_b}{\cosh [m \cdot L]} \cdot \int_0^L \cosh [m \cdot y] \cdot dy$$

Integrando.

$$\overline{\theta(x)} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\theta_b}{\cosh [m \cdot L]} \cdot \frac{\sinh [m \cdot y]}{m} \Big|_0^L$$

$$\overline{\theta(x)} = \frac{1}{m \cdot L} \cdot \frac{\theta_b}{\cosh [m \cdot L]} \cdot [\sinh [m \cdot L] - \sinh [m \cdot 0]]$$

$$\overline{\theta(x)} = \frac{\theta_b}{m \cdot L} \cdot \tanh [m \cdot L]$$

Reemplazando valores.

$$\overline{\theta(x)} = (T_\infty - \overline{T_P}) = \frac{900}{55,66 \cdot 0,05} \cdot \tanh [55,66 \cdot 0,05] = 320,9$$

$$\overline{T_P} = T_\infty - \overline{\theta(x)} = 1200 - 320,9 = 879,1^\circ\text{C}$$

Con este valor de temperatura media se calcula el calor intercambiado por el álabe.

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - \overline{T_P}) = 168,97 \cdot 0,011 \cdot (1200 - 879,1) = 596,5 \text{ W}$$

Valor que coincide con el calculado en el apartado 8.

Si ahora se utiliza una definición de la temperatura media como la media aritmética de las temperaturas extremas y se calcula el calor transferido por el álabe.

$$\overline{T_P} = \frac{T(L) + T(b)}{2} = \frac{1089,1 + 300}{2} = 694,5^\circ\text{C}$$

$$\dot{q}_{\text{álabe}} = h \cdot A_L \cdot (T_\infty - \overline{T_P}) = 168,9 \cdot 0,011 \cdot (1200 - 694,5) = 939,5 \text{ W}$$

Como puede observarse el error cometido al hacer esta aproximación puede ser del orden del 50 % del calor real intercambiado. Ésto se debe a que la variación de la temperatura no es lineal con la longitud del álabe.

## Capítulo 5

# Transitorios térmicos



## 5.1 Enfriamiento del papel de aluminio

Al retirar del horno una bandeja cubierta de papel de aluminio de espesor  $e = 0,1$  mm, éste se encuentra a una temperatura de  $200^\circ\text{C}$ .

Se pide:

1. Calcular el tiempo necesario para que el papel de aluminio alcance una temperatura de  $40^\circ\text{C}$  cuando se pone en contacto con aire ambiente a  $20^\circ\text{C}$ . El coeficiente de convección es  $h = 80$   $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ .
2. Si se coge el papel de aluminio con los dedos ( $T_d = 37^\circ\text{C}$ ) estando dentro del horno, es decir, antes de que comience a enfriarse, calcular el incremento de temperatura que produce en los dedos el enfriamiento del papel de aluminio.

Propiedades físicas del aluminio:

$$k_{al} = 177 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K} \quad C_{p_{al}} = 875 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K} \quad \rho_{al} = 2770 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Propiedades físicas de los dedos similar a las del agua (el cuerpo humano es 72% agua):

$$k_d = 0,62 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K} \quad C_{p_d} = 4180 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K} \quad \rho_d = 996 \text{ kg}/\text{m}^3$$

### Apartado 1

Primero se calcula el número de Biot del problema para poder definir si se puede aplicar el método de la resistencia interna despreciable. Como longitud característica se toma la relación volumen/área, que para este caso es el espesor  $e$  del aluminio.

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot L_c}{k_{al}} = \frac{80 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{177}$$

$$\text{Bi} = 4,52 \cdot 10^{-5}$$

Con este valor de número de Biot mucho menor que 0,1 se puede considerar como válido el considerar que la distribución de temperatura en el aluminio es homogénea.

Para este problema el tiempo característico  $\tau$  se puede calcular como:

$$\tau = \frac{\rho_{al} \cdot C_{p_{al}}}{h} \cdot \frac{V}{A} = \frac{2770 \cdot 875}{80} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 3,03 \text{ s}$$

La variación de temperatura con el tiempo para un problema donde se puede considerar la resistencia interna despreciable se puede calcular como:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-t/\tau}$$

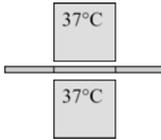
A partir de esta ecuación se puede calcular el tiempo  $t$  necesario para alcanzar la temperatura  $T(t) = 40^\circ\text{C}$ .

$$t = -\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \cdot \tau = -\ln \left( \frac{40 - 20}{200 - 20} \right) \cdot 3,03$$

$$t = 6,66 \text{ s}$$

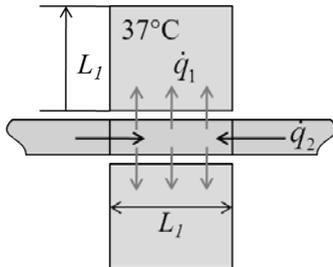
## Apartado 2

El esquema simplificado para el análisis del problema es el siguiente:



El aluminio es un prisma rectangular de  $1 \cdot 1 \cdot 0,01$  cm. Los dedos los consideramos como dos cubos de 1 cm de lado.

Para poder realizar el cálculo se deberán hacer unas hipótesis que permitan calcular una temperatura del aluminio  $T_{al}$  en el estado estacionario del problema.



- Cuando se toca con los dedos hay un flujo de calor hacia los dedos ( $\dot{q}_1$ ) que enfría el papel aluminio.

$$\dot{q}_1 = 2 \cdot A_1 \cdot \frac{k_d}{L_1} \cdot (T_{al} - T_d)$$

- Suponiendo que el resto del papel de aluminio se mantiene a  $200^\circ\text{C}$ , habrá un flujo de calor ( $\dot{q}_2$ ) en dirección perpendicular al anterior.

$$\dot{q}_2 = 2 \cdot A_2 \cdot \frac{k_d}{L_1/2} \cdot (T_i - T_{al})$$

Igualando estos dos flujos de calor podremos hallar la temperatura a la que estaría la porción de papel de aluminio entre los dedos en estado estacionario.

$$2 \cdot A_1 \cdot \frac{k_d}{L_1} \cdot (T_{al} - T_d) = 2 \cdot A_2 \cdot \frac{k_d}{L_1/2} \cdot (T_i - T_{al})$$

$$\frac{T_i - T_{al}}{T_{al} - T_d} = \frac{A_1 \cdot k_d}{A_2 \cdot k_{al}} \cdot \frac{1}{2}$$

Las áreas ( $A_1$  y  $A_2$ ) se calculan como:  $A_1 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^2$  y  $A_2 = 1 \cdot 0,01 = 0,01 \text{ cm}^2$ . Reemplazando valores en la ecuación anterior:

$$\frac{T_i - T_{al}}{T_{al} - T_d} = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,62}{0,01 \cdot 10^{-4} \cdot 177} \cdot \frac{1}{2} = 0,175$$

Por lo tanto el valor de la temperatura de equilibrio del aluminio es:

$$T_{al} = \frac{T_i + (T_d \cdot 0,175)}{(1 + 0,175)} = \frac{220 + (37 \cdot 0,175)}{(1 + 0,175)}$$

$$T_{al} = 175,7^\circ\text{C}$$

Con la temperatura obtenida se realiza un balance de energía de la siguiente forma: el calor cedido por el aluminio en contacto con los dedos al enfriarse desde  $175,7^\circ\text{C}$  hasta la temperatura de los dedos, es igual al calor que reciben los dedos. De este balance se podrá despejar el incremento de temperatura en los dedos.

$$m_{al} \cdot C_{p_{al}} \cdot (T_{i.al} - T_{f.al}) = m_d \cdot C_{p_d} \cdot (T_{i.d} - T_{f.d})$$

$$\Delta T_d = (T_{i.d} - T_{f.d}) = \frac{m_{al} \cdot C_{p_{al}}}{m_d \cdot C_{p_d}} \cdot (T_{i.al} - T_{f.al})$$

$$\Delta T_d = \frac{V_{al} \cdot \rho_{al} \cdot C_{p_{al}}}{V_d \cdot \rho_d \cdot C_{p_d}} \cdot (T_{i.al} - T_{f.al})$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\Delta T_d = \frac{1 \cdot 10^{-8} \cdot 2770 \cdot 875}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 996 \cdot 4180} \cdot (175,7 - 37) = 0,4^\circ\text{C}$$

Como se observa, el incremento de temperatura en los dedos es mínimo y por lo tanto no se tiene la sensación de que el papel de aluminio esté caliente.

Nota. Se ha supuesto que la temperatura final del aluminio es la temperatura inicial de los dedos ( $37^{\circ}\text{C}$ ). Esto evidentemente es un error ya que la temperatura final del aluminio es la temperatura inicial de los dedos más el incremento calculado. Por lo tanto, para poder resolver correctamente el problema habría que realizar un proceso iterativo.

## 5.2 Tiempo de cocinado

Un cocinero curioso se hace las dos preguntas siguientes:

- Si duplico el espesor de una hamburguesa ¿Cómo se modifica el tiempo de cocinado de la hamburguesa?
- Si reduzco la temperatura inicial de la hamburguesa ¿Cómo se modifica el tiempo de cocinado?

Para ayudar al cocinero curioso se pide resolver lo siguiente:

1. Encontrar como se escala el tiempo de cocinado con el espesor de una hamburguesa aceptando las siguientes hipótesis:
  - La hamburguesa tiene un espesor  $2L$  y está inicialmente a una temperatura  $T_i$  cuando se introduce en una parrilla y sus dos caras se calientan de igual forma, sólo por convección con un coeficiente de película  $h$  siendo la temperatura del aire  $T_\infty$ .
  - Se considera que la hamburguesa está cocinada cuando la temperatura en su centro alcanza el valor  $T_0$ .
  - Suponemos que el número de Fourier  $Fo = \alpha \cdot t/L^2$  es mayor que 0,2 y que el número de Biot es muy grande ( $Bi \rightarrow \infty$ ).

2. Determinar y comparar los tiempos de cocinado correspondientes a:

$$2L = 20 \text{ mm y } 2L = 40 \text{ mm}$$

Particularizar el problema para dos casos con los siguientes datos:

$$\begin{array}{ll} T_i = 20^\circ\text{C} & T_0 = 60^\circ\text{C} \\ T_\infty = 100^\circ\text{C} & h = 5000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \end{array}$$

Las propiedades de la hamburguesa son:

$$\begin{array}{ll} k = 0,471 \text{ W/m} \cdot \text{K} & \rho = 1090 \text{ kg/m}^3 \\ Cp = 3450 \text{ J/kg} \cdot \text{K} & \end{array}$$

3. Comprobar que las hipótesis de Bi y Fo realizadas en el apartado 1 son aceptables.
4. Determinar una relación analítica aproximada entre el tiempo de cocinado y la temperatura inicial de la hamburguesa.

5. Particularizar el problema para dos casos con los mismos datos del apartado 2, excepto:

$$2L = 20 \text{ mm}$$

$$T_i = 20^\circ\text{C} \text{ y } T_\infty = 5^\circ\text{C}$$

6. Con los datos del apartado 2, y considerando  $2L = 20 \text{ mm}$ , determinar el valor de la temperatura en la pared exterior de la hamburguesa al final de la cocción si consideramos  $Bi = \infty$  o el valor del número de Biot real obtenido.
7. Dibujar esquemáticamente el perfil de temperatura en el interior de la hamburguesa para los datos del apartado 6.
8. Para los datos del apartado 6 determinar la cantidad de calor absorbida por la hamburguesa respecto del calor que absorbería para  $t \rightarrow \infty$ .

### Apartado 1

Si se acepta, como dice el enunciado, que  $Fo > 0,2$  y  $Bi \rightarrow \infty$ , la expresión para calcular la temperatura adimensional es:

$$\theta = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot \cos(\xi_1 \cdot (x/L))$$

Siendo  $C_1$  y  $\xi_1$  constantes que obtienen de tablas en función del número de Biot:

Las condiciones para considerar la hamburguesa cocinada son que  $T(0,t) = T_0$ .

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow x/L = 0 \Rightarrow \cos(\xi_1 \cdot (x/L)) = 1$$

Si ahora se consideran dos hamburguesas de espesor  $L_A$  y  $L_B$  respectivamente, que alcanzan su cocción cuando la temperatura en el centro es  $T_0$ , aunque el tiempo de cocinado para ambas sea diferente, los valores de la temperatura adimensional para cada hamburguesa son iguales:

$$\theta_{0.A} = \theta_{0.B} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Para cada una de las hamburguesas su temperatura en el centro ( $\theta_0$ ) se puede escribir como:

$$\theta_{0.A} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo_A)} \quad \text{y} \quad \theta_{0.B} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo_B)}$$

Igualando ambas ecuaciones se puede escribir que:

$$C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo_A)} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo_B)}$$

Los valores de las constantes son los mismos para ambas hamburguesas ya que el número de Biot tiende a infinito. Por lo tanto, para que la igualdad se cumpla los números de Fourier deben ser iguales.

$$Fo_A = Fo_B \Rightarrow \frac{\alpha \cdot t_A}{L_A^2} = \frac{\alpha \cdot t_B}{L_B^2} \Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = \frac{L_A^2}{L_B^2}$$

Por lo tanto, se puede decir que el tiempo de cocinado de una hamburguesa se escala con el cuadrado de su espesor.

## Apartado 2

A partir del razonamiento realizado en el apartado anterior, se calcula la temperatura adimensional para el centro de la hamburguesa  $\theta_0$ , que debe ser igual para las dos hamburguesas consideradas en este apartado.

$$\theta_{0.A} = \theta_{0.B} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{60 - 100}{20 - 100}$$

$$\theta_{0.A} = \theta_{0.B} = 0,5$$

El número de Fourier lo podemos despejar de la ecuación obtenida en el apartado anterior, independientemente de que hamburguesa se esté considerando, puesto que ambos deben ser iguales.

$$\theta_{0.A} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo_A)} \Rightarrow Fo_A = Fo_B = -\ln\left(\frac{\theta_{0.A}}{C_1}\right) \cdot \frac{1}{\xi_1^2}$$

Para  $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow C_1 = 1,2732$  y  $\xi_1 = 1,5707$ .

$$Fo_A = Fo_B = -\ln\left(\frac{0,5}{1,2732}\right) \cdot \frac{1}{1,5707^2} = 0,379$$

A partir de la definición del número de Fourier podemos calcular el tiempo de cocción.

$$\text{Fo} = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\text{Fo} \cdot L^2}{\alpha}$$

El valor de la difusividad térmica se calcula como:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p} = \frac{0,471}{1090 \cdot 3450} = 1,2525 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando valores y caracterizando para cada uno de los espesores considerados se obtiene:

$$t_A = \frac{\text{Fo}_A \cdot L_A^2}{\alpha} = \frac{0,379 \cdot 0,01^2}{1,2525 \cdot 10^{-7}} = 302,5 \text{ s}$$

$$t_B = \frac{\text{Fo}_B \cdot L_B^2}{\alpha} = \frac{0,379 \cdot 0,02^2}{1,2525 \cdot 10^{-7}} = 1209,9 \text{ s}$$

### Apartado 3

La hipótesis hecha en el apartado 1 de que el número de Fourier es mayor que 0,2 se cumple ( $\text{Fo} = 0,379$ ).

Respecto al número de Biot, se deben calcular para cada uno de los espesores considerados.

$$\text{Bi}_A = \frac{h \cdot L_A}{k} = \frac{5000 \cdot 0,01}{0,471} = 106,2$$

$$\text{Bi}_B = \frac{h \cdot L_B}{k} = \frac{5000 \cdot 0,02}{0,471} = 212,3$$

Los valores obtenidos para el número de Biot en ambos casos son lo suficientemente grandes para considerar que es válida la hipótesis propuesta en el apartado 1.

### Apartado 4

A partir de la expresión hallada en el apartado 2 para el número de Fourier, aplicada de forma genérica.

$$Fo = -\ln\left(\frac{\theta_0}{C_1}\right) \cdot \frac{1}{\xi_1^2} = -\frac{1}{\xi_1^2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right) - \ln C_1 \right]$$

Reemplazando en la ecuación anterior la definición del número de Fourier, se puede hallar una expresión analítica que relaciona el tiempo de cocción con la temperatura inicial de la hamburguesa.

$$\frac{\alpha \cdot t}{L^2} = -\frac{1}{\xi_1^2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right) - \ln C_1 \right]$$

$$t = -\frac{L^2}{\alpha \cdot \xi_1^2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right) - \ln C_1 \right]$$

### Apartado 5

Particularizando el problema ahora para dos temperaturas iniciales distintas, se puede calcular cuánto es el tiempo de cocción haciendo uso de la ecuación anterior.

Las constantes son las mismas que se utilizaron en el apartado 2 y el espesor  $2L = 0,02$  m. Las temperaturas iniciales que se consideran son  $20$  y  $5^\circ\text{C}$ .

$$t_{T_i=20} = -\frac{0,01^2}{1,252 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5707^2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{60 - 100}{20 - 100}\right) - \ln 1,2732 \right] = 302,5 \text{ s}$$

$$t_{T_i=5} = -\frac{0,01^2}{1,252 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5707^2} \cdot \left[ \ln\left(\frac{60 - 100}{5 - 100}\right) - \ln 1,2732 \right] = 358,1 \text{ s}$$

### Apartado 6

Con los datos del apartado 2, y considerando  $2L = 20$  mm, para hallar el valor de la temperatura hay que particularizar la solución aproximada para  $x = L$  y  $t = t_c$  (donde  $t_c = 302,5$  s es el tiempo de cocción calculado en los apartados anteriores).

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot \cos(\xi_1 \cdot (x/L))$$

Para  $x = L \Rightarrow x/L = 1$ :

$$T(L, t) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) \cdot C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot \cos(\xi_1)$$

Para  $x = 0 \Rightarrow x/L = 0$ :

$$T(0, t) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) \cdot C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma siguiente:

$$(T_i - T_{\infty}) = \frac{(T(0, t) - T_{\infty})}{C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}}$$

Reemplazando está última ecuación en la ecuación obtenida para  $x = L$ .

$$T(L, t) = T_{\infty} + (T(0, t) - T_{\infty}) \cdot \cos(\xi_1)$$

Particularizando ahora para  $t = t_c \Rightarrow T(0, t) = T_0$ :

$$T(L, t_c) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \cdot \cos(\xi_1)$$

Para  $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow C_1 = 1,2732$  y  $\xi_1 = 1,5707$ :

$$T(L, t_c) = 100 + (60 - 100) \cdot \cos(1,5707) = 99,99^{\circ}\text{C}$$

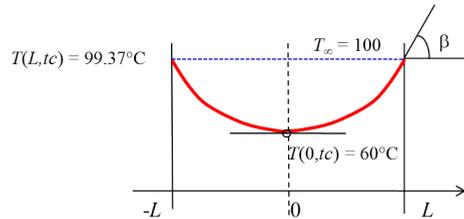
Para  $Bi = 106,2 \Rightarrow C_1 = 1,2731$  y  $\xi_1 = 1,5552$ :

$$T(L, t_c) = 100 + (60 - 100) \cdot \cos(1,5552) = 99,37^{\circ}\text{C}$$

Con la hipótesis de  $Bi \rightarrow \infty$  ya no hay transmisión de calor por conducción dentro de la hamburguesa ( $k \rightarrow 0$ ) y no hay calor transmitido por convección ya que  $T(L, t_c) \sim T_{\infty}$ , por lo tanto, el  $\Delta T = 0$ . Para el número de Biot real, sigue habiendo transmisión de calor.

## Apartado 7

La distribución de temperatura dentro de la hamburguesa tiene una forma como la que se muestra en la figura 5.2.1.



**Figura 5.2.1:** Representación esquemática de la distribución de temperatura en el interior de la hamburguesa

Por simetría axial la tangente de la curva de temperatura en el centro de la hamburguesa es igual a 0.

$$\left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Derivando la ecuación de la distribución de temperatura en la hamburguesa y particularizando para  $x = L$ , se puede obtener la pendiente de la curva en la superficie de la hamburguesa.

$$\left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = -C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot \xi_1 \cdot \text{sen}(\xi_1 \cdot (x/L))$$

Teniendo en cuenta que para  $x = L \Rightarrow \theta_0 = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$ :

$$\left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = -\theta_0 \cdot \xi_1 \cdot \text{sen}(\xi_1)$$

Reemplazando valores para:

Para  $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow \xi_1 = 1,5707$ :

$$\left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = -0,5 \cdot 1,5707 \cdot \text{sen}(1,5707) = -0,785$$

$$\beta = 38,14^\circ$$

Para  $Bi = 106,2 \Rightarrow \xi_1 = 1,5552$ :

$$\left. \frac{d\theta(x, t)}{dx} \right|_{x=L} = -0,5 \cdot 1,5552 \cdot \text{sen}(1,5552) = -0,777$$

$$\beta = 37,86^\circ$$

### Apartado 8

Para hallar la cantidad de calor absorbida respecto a la cantidad de calor para  $t \rightarrow \infty$  se aplica la ecuación:

$$\frac{Q_{(t=t_c)}}{Q_{(t=\infty)}} = 1 - \frac{\text{sen } \xi_1}{\xi_1} \cdot \theta_{(t=t_c)} = 1 - \frac{\text{sen } \xi_1}{\xi_1} \cdot \theta_0$$

Reemplazando valores para:

Para  $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow \xi_1 = 1,5707$ :

$$\frac{Q_{(t=t_c)}}{Q_{(t=\infty)}} = 1 - \frac{\text{sen } 1,5707}{1,5707} \cdot 0,5 = 0,682$$

Para  $Bi = 106,2 \Rightarrow \xi_1 = 1,5552$ :

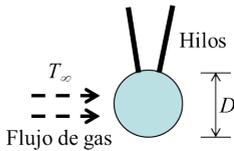
$$\frac{Q_{(t=t_c)}}{Q_{(t=\infty)}} = 1 - \frac{\text{sen } 1,5552}{1,5552} \cdot 0,5 = 0,678$$

Los valores obtenidos indican que para llegar a una temperatura homogénea de  $100^\circ\text{C}$  hay que aportar cerca de un 50% más de calor del ya aportado hasta el instante de cocción.

## 5.3 Termopar

Se quiere emplear un termopar de forma aproximadamente esférica con diámetro  $D$  para la medida de la temperatura de un flujo de gas. La temperatura del gas es  $T_\infty$  y la temperatura inicial del termopar es  $T_0$ , su volumen  $V$  y su superficie  $A$ . El coeficiente de película gas-termopar es  $h$ .

El termopar intercambia una cantidad de calor por unidad de tiempo a través de los hilos que lo conectan al termómetro que se puede expresar como  $C \cdot (T - T_0)$ , siendo  $C$  la inversa de la resistencia térmica de los hilos.



Las propiedades del termopar son:

$$\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$$

$$Cp = 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$k = 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Se pide:

1. Plantear la ecuación de la energía para el transitorio térmico del termopar, suponiendo que la temperatura  $T(t)$  es uniforme en todo el termopar.
2. Determinar el valor de la temperatura del termopar cuando alcanza condiciones estacionarias.
3. Resolver la ecuación planteada en el apartado 1 y encontrar una expresión para la evolución de la temperatura del termopar de la forma:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-t/\tau}$$

Siendo:  $\theta = M - T(t)$ ,  $\theta_0 = M - T_0$

$$\tau = \frac{\rho \cdot Cp \cdot V}{A \cdot h + C} \quad M = \frac{A \cdot h \cdot T_\infty + C \cdot T_0}{A \cdot h + C}$$

4. Determinar el número de Biot y justificar la hipótesis efectuada en el apartado 1 para los siguientes datos:  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = 200^\circ\text{C}$ ,  $D = 0,7 \text{ mm}$ ,  $h = 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y  $C = 0,1 \cdot A \cdot h$ .
5. Determinar el valor de  $T_\infty$ ,  $\tau$  y  $T(3\tau)$  para los datos del apartado 4.
6. Determinar el número de Fourier para  $t = \tau$ .

7. Consideremos ahora que el fluido circula por una tubería cuya pared interna está a  $T_p = 400^\circ\text{C}$ . Si la emisividad del termopar es  $\epsilon = 0,9$  plantear la ecuación de conservación de la energía si hay intercambio de calor por radiación entre el termopar y las paredes de la tubería.
8. Determinar la nueva temperatura del termopar  $T_\infty$  en condiciones estacionarias.
9. Determinar la evolución de la temperatura en función del tiempo al resolver la ecuación del apartado 7.

### Apartado 1

La ecuación de la energía para el transitorio térmico del par, suponiendo que la temperatura  $T(t)$  es uniforme se puede plantear como:

$$\rho \cdot C_p \cdot V \cdot \frac{dT(t)}{dt} = A \cdot h \cdot [T_\infty - T(t)] - C \cdot [T(t) - T_0]$$

Donde  $V$  y  $A$  son el volumen y el área del termopar. Operando la ecuación anterior:

$$\rho \cdot C_p \cdot V \cdot \frac{dT(t)}{dt} = A \cdot h \cdot T_\infty + C \cdot T_0 - T(t) \cdot [(A \cdot h) + C]$$

$$\frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{(A \cdot h) + C} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = \frac{A \cdot h \cdot T_\infty + C \cdot T_0}{(A \cdot h) + C} - T(t)$$

Siendo:

$$\frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{(A \cdot h) + C} = \tau \quad \text{Es el tiempo característico}$$

$$\frac{A \cdot h \cdot T_\infty + C \cdot T_0}{(A \cdot h) + C} = M \quad \text{Es un valor en unidades de temperatura que relaciona las condiciones de contorno}$$

Quedando por lo tanto la ecuación de la energía expresada de la forma:

$$\tau \cdot \frac{dT(t)}{dt} = M - T(t)$$

## Apartado 2

La temperatura en condiciones estacionarias  $T(\infty)$  se obtiene cuando:

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0$$

Por lo tanto, de la ecuación obtenida en el apartado anterior, se puede decir que:

$$0 = M - T(\infty) \quad \Rightarrow \quad T(\infty) = M$$

Teniendo en cuenta el valor de M definido en el apartado anterior:

$$T(\infty) = M = \frac{A \cdot h \cdot T_{\infty} + C \cdot T_0}{(A \cdot h) + C}$$

Multiplicando y Dividiendo por  $A \cdot h$ , se obtiene:

$$T(\infty) = \frac{T_{\infty} + T_0 \cdot (C/A \cdot h)}{1 + (C/A \cdot h)}$$

La temperatura que marcará el termopar en condiciones estacionarias,  $T(\infty)$ , solo es igual a la temperatura del fluido,  $T_{\infty}$ , cuando  $C/A \cdot h = 0$ .

El error cometido se puede evaluar como:

$$\text{error} = T_{\infty} - T(\infty) = T_{\infty} - \frac{T_{\infty} + T_0 \cdot (C/A \cdot h)}{1 + (C/A \cdot h)}$$

$$\text{error} = \frac{(C/A \cdot h) \cdot (T_{\infty} - T_0)}{1 + (C/A \cdot h)}$$

## Apartado 3

Haciendo  $M - T(t) = \theta$ , la ecuación del apartado 1 se puede escribir como:

$$-\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} = \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando:

$$\ln \theta = -\frac{t}{\tau} + cte$$

Imponiendo la condición inicial:  $t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0$

$$cte = \ln \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \ln \theta = -\frac{t}{\tau} + \ln \theta_0$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-t/\tau}$$

Efectivamente para:

$$\begin{array}{llll} t = 0 & \Rightarrow & \theta = \theta_0 & \Rightarrow & T(0) = T_0 \\ t = \infty & \Rightarrow & \theta = 0 & \Rightarrow & T(\infty) = M \\ t = 3 \cdot \tau & \Rightarrow & \theta = 0,05 \cdot \theta_0 & \Rightarrow & T(3\tau) = 0,05 \cdot T_0 + 0,95 \cdot M \end{array}$$

#### Apartado 4

El número de Biot se define como:

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{k}$$

Siendo  $L_c$  es la longitud característica del problema, que se calcula como:

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3/3}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = r/3$$

Por lo tanto el número de Biot tiene por valor:

$$Bi = \frac{h \cdot r/3}{k} = \frac{400 \cdot 0,35 \cdot 10^{-3}/3}{20} = 2,35 \cdot 10^{-3} \ll 0,1$$

Visto el resultado obtenido, la hipótesis aceptada en el apartado 1 es coherente.

Otra forma de definir el número de Biot sería:

$$Bi = \frac{h_{eq} \cdot r/3}{k}$$

Siendo  $h_{eq} = h \cdot (1 + C/(A \cdot h)) = 1,1 \cdot h$ , por lo que cualitativamente no hay apenas diferencia.

## Apartado 5

El valor de  $T(\infty)$  lo obtenemos reemplazando los valores en la expresión obtenida en el apartado 2.

$$T(\infty) = M \quad \Rightarrow \quad T(\infty) = \frac{T_{\infty} + T_0 \cdot (C/A \cdot h)}{1 + (C/A \cdot h)}$$

$$T(\infty) = \frac{200 + 25 \cdot 0,1}{1 + 0,1} = 184,1^{\circ}\text{C}$$

Por tanto el valor de la temperatura que mide el termopar es un 9 % por debajo del valor real.

El tiempo característico del termopar es:

$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{(A \cdot h) + C} = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{1,1 \cdot A \cdot h}$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p \cdot L_c}{1,1 \cdot h} = \frac{8500 \cdot 400 \cdot 0,35 \cdot 10^{-3}/3}{1,1 \cdot 400} = 0,9 \text{ s}$$

Para determinar  $T(3\tau)$  particularizamos la ecuación  $\theta/\theta_0 = e^{-t/\tau}$ .

$$t = 3 \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad \theta = 0,05 \cdot \theta_0 \quad \Rightarrow \quad T(3\tau) = 0,05 \cdot T_0 + 0,95 \cdot M$$

$$T(3\tau) = 0,05 \cdot 25 + 0,95 \cdot 184,1 = 176,15^{\circ}\text{C}$$

Estando ésta medida un 12% por debajo del valor real.

## Apartado 6

El número de Fourier se define como:

$$\text{Fo} = \frac{\alpha \cdot t}{L_c^2}$$

Siendo la difusividad térmica del termopar:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot Cp} = \frac{20}{8500 \cdot 400} = 5,88 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Para  $t = \tau$

$$Fo = \frac{5,88 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9}{0,35 \cdot (10^{-3}/3)^2} = 388,8$$

Lo que indica que el transitorio ya está avanzado.

### Apartado 7

La ecuación de conservación de la energía, si además hay intercambio de calor por radiación entre el termopar y las paredes de la tubería, se puede escribir como:

$$\rho \cdot Cp \cdot V \cdot \frac{dT(t)}{dt} = A \cdot h \cdot [T_{\infty} - T(t)] - C[T(t) - T_0] + \epsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot [T_p^4 - T(t)^4]$$

Ordenando adecuadamente la ecuación anterior:

$$\frac{\rho \cdot Cp \cdot V}{(A \cdot h) + C} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = M - T(t) + \frac{\epsilon \cdot A \cdot \sigma}{(A \cdot h) + C} \cdot [T_p^4 - T(t)^4]$$

### Apartado 8

Al igual que en el apartado 2 la temperatura en condiciones estacionarias  $T(\infty)$  se obtiene cuando:

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0$$

Por lo tanto:

$$0 = M - T(\infty) + \frac{\epsilon \cdot A \cdot \sigma}{(A \cdot h) + C} \cdot [T_p^4 - T(\infty)^4]$$

$$T(\infty) = M + N \cdot [T_p^4 - T(\infty)^4]$$

Donde:

$$N = \frac{\epsilon \cdot A \cdot \sigma}{((A \cdot h) + C)}$$

Reemplazando los valores para este problema.

$$M = 184,1^\circ\text{C} = 457,1 \text{ K}$$

$$T_p = 400^\circ\text{C} = 673 \text{ K}$$

$$N = 1,16 \cdot 10^{-10} \text{ 1/K}^3$$

Por tanto la ecuación queda:

$$T(\infty) = 457,1 + 1,16 \cdot 10^{-10} \cdot [673^4 - T(\infty)^4]$$

Utilizando algún método de búsqueda de cero se obtiene la solución al problema.

$$T(\infty) = 475 \text{ K}$$

## Apartado 9

Definiendo dos tiempos característicos de la siguiente forma:

$$\tau_1 = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{(A \cdot h) + C} \quad \text{y} \quad \tau_2 = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V}{\epsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T_p^3}$$

La ecuación obtenida en el apartado 7 se puede expresar ahora como:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{M - T(t)}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2 \cdot T_p^3} \cdot [T_p^4 - T(t)^4]$$

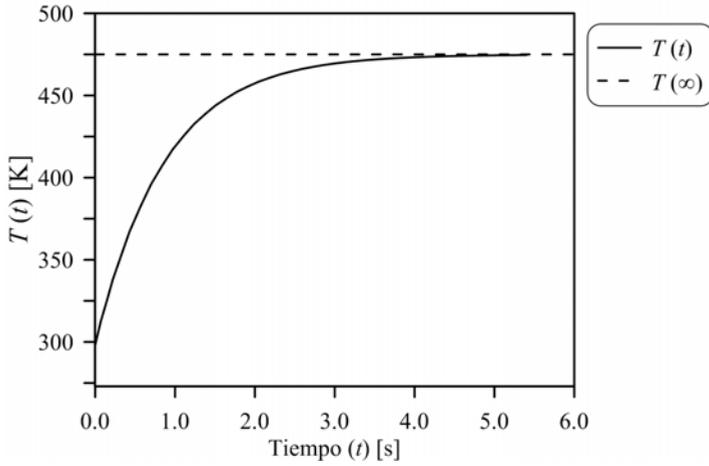
Reemplazando los valores para este problema se obtiene:

$$M = 184,1^\circ\text{C} = 457,1 \text{ K}$$

$$T_p = 400^\circ\text{C} = 673 \text{ K}$$

$$\tau_1 = 0,9 \text{ s}$$

$$\tau_2 = 25,5 \text{ s}$$



**Figura 5.3.1:** Solución a la ecuación del apartado 7.

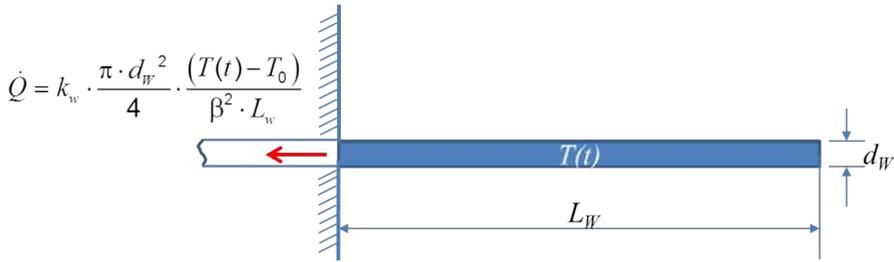
Siendo la ecuación diferencial resultante:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{457,1 - T(t)}{0,9} + \frac{1}{25,5 \cdot 673^3} \cdot [673^4 - T(t)^4]$$

En la figura 5.3.1 se representa la evolución de la temperatura  $T(t)$  para los datos del problema. La ecuación se ha resuelto con el método de Runge-Kutta.

## 5.4 Medida de temperatura con un hilo delgado

Se considera un hilo de geometría cilíndrica con diámetro  $d_w$  y longitud expuesta  $L_w$ , tal como se indica en la figura. Las propiedades del material son: densidad  $\rho_w$ , conductividad térmica  $k_w$  y capacidad calorífica  $Cp_w$ .



El hilo forma parte de un termopar que inicialmente se encuentra a una temperatura  $T_0$ . En el instante  $t = 0$  se genera de forma instantánea (función escalón) una corriente gaseosa transversal con velocidad  $u_g$  y temperatura  $T_g > T_0$  de tal forma que el coeficiente de película gas-cilindro es  $h_g$ .  $\beta$  es un parámetro de forma del orden de 3.

Se pide:

1. Durante el transitorio térmico al que se somete el “hilo expuesto”, suponemos que la temperatura del mismo es una función exclusiva del tiempo  $T(t)$ , siendo por tanto uniforme en todo el “hilo expuesto”. Si despreciamos el calor intercambiado por radiación y suponemos que el hilo intercambia calor por conducción por su extremo izquierdo, de acuerdo con la expresión de la figura, plantear y justificar la ecuación de la energía para el sistema “hilo expuesto”.
2. La ecuación obtenida en el apartado 1 se puede escribir como:

$$\tau \cdot \frac{dT(t)}{dt} = [T_g - T(t)] - A \cdot [T(t) - T_0]$$

Donde:

$\tau = (Cp_w \cdot \rho_w \cdot d_w)/(4 \cdot h_g)$  es un tiempo característico.

$A = (k_w \cdot d_w)/(4 \cdot h_g \cdot \beta^2 \cdot L_w^2)$  es un parámetro adimensional.

Obtener la expresión de la temperatura del hilo al final del transitorio  $T_\infty$ .

3. En la literatura se suele considerar como criterio que en el estacionario  $T(\infty) \approx T_g$  cuando se cumple la condición:

$$2 \cdot \frac{\beta \cdot L_w}{d_w} \cdot \sqrt{\text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{k_g}{k_w}} > 10$$

Siendo  $\text{Nu}_{d_w}$  el número de Nusselt característico del proceso de convección térmica fluido-cilindro referido al diámetro  $d_w$  y  $k_g$  la conductividad térmica del gas.

Comparar este parámetro adimensional con  $A$  y justificar el criterio anterior. ¿Cuánto debe valer  $A$  para satisfacer el criterio anterior?

4. De acuerdo con los razonamientos del apartado 3 y desde un punto de vista cualitativo y de tendencias, justificar como deben modificarse los parámetros relevantes para conseguir que en el estacionario  $T(\infty) \approx T_g$ .
5. Definiendo una temperatura adimensional:

$$\theta(t) = \frac{T_g - T(t)}{T_g - T_0}$$

Comprobar que la ecuación diferencial del apartado 2 se puede escribir como:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = A - \theta(t) \cdot (1 + A)$$

6. Resolver la ecuación diferencial del apartado anterior en  $\theta(t)$  con la condición inicial  $\theta(0) = 1$  para  $t = 0$ .
7. La solución al apartado anterior se puede escribir como:

$$\theta(t) = \frac{e^{(-t/\tau) \cdot (1+A)} + A}{1 + A}$$

Dibujar esquemáticamente un diagrama  $\theta(t)$  en función de  $t$  señalando los valores de  $\theta(0)$ ,  $\theta(\tau)$ ,  $\theta(3\tau)$  y el valor asintótico de  $\theta(\infty)$ .

8. Suponiendo los siguientes valores:  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_g = 700^\circ\text{C}$  y  $A = 0,01$ . Determinar el valor de  $T(\infty)$  y  $\theta(3\tau)$ .
9. Suponiendo que la corriente gaseosa tiene un número de Mach  $M = 1$ , que las propiedades del gas son  $R = 273 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ,  $\gamma = 1,35$ ,  $\nu_g = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

y  $k_g = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ W/m} \cdot \text{K}$ , determinar el número de Reynolds  $Re_{dw}$  si el diámetro del hilo es  $d_w = 10^{-4} \text{ m}$ .

10. A partir de la correlación de Zhukauskas para intercambio de calor por convección en flujos transversales a cilindros, determinar el  $Nu_{dw}$  siendo el número de Prandtl para el gas  $Pr(700^\circ\text{C}) = 0,723$  y  $Pr(25^\circ\text{C}) = 0,707$ . Justificar la elección de los parámetros de la ecuación y justificar los rangos de incertidumbre. Determinar el coeficiente de película  $h_g$ .
11. Se estudia la posibilidad de emplear un termopar tipo K de Cromel /Alumel, materiales con las siguientes propiedades:

Cromel (Ni90 - Cr10):

$$\rho = 8730 \text{ kg/m}^3, C_p = 448 \text{ J/kg} \cdot \text{K}, k = 19 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

Alumel (Ni95 - Al5):

$$\rho = 8600 \text{ kg/m}^3, C_p = 523 \text{ J/kg} \cdot \text{K}, k = 28 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

Determinar el tiempo característico  $\tau$  correspondiente a ambos materiales y el valor mínimo del parámetro adimensional de forma  $\beta \cdot L_w/d_w$  correspondiente a ambos materiales para garantizar el cumplimiento del criterio del apartado 3.

Justificar cuál de los dos materiales es más interesante como hilo de un termopar sometido a un transitorio térmico desde el punto de vista de la precisión en la medida de la temperatura del fluido y de la rapidez de respuesta.

12. Determinar el número de Biot ( $Bi_{dw}$ ) para ambos materiales. A la vista del resultado obtenido justificar si la hipótesis de  $T(t)$  uniforme en todo el hilo aceptada en el apartado 1 es razonable.

### 5.4.1 Apartado 1

El hilo expuesto está intercambiando calor con el gas por convección y transmitiendo una cantidad de calor por conducción hacia el exterior, además durante el transitorio térmico el hilo expuesto se está calentando, por lo tanto, el balance de energía se puede escribir como:

$$V_w \cdot \rho_w \cdot C_{p_w} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = A_w \cdot h_g \cdot [T_g - T(t)] - \frac{\pi \cdot d_w^2}{4} \cdot k_w \cdot \frac{[T(t) - T_0]}{\beta^2 \cdot L_w}$$

Siendo  $V_w$  el volumen del hilo y  $A_w$  el área expuesta del hilo.

Sustituyendo los valores de  $V_w$  y  $A_w$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cdot d_w^2}{4} \cdot L_w \cdot \rho_w \cdot Cp_w \cdot \frac{dT(t)}{dt} &= \\ &= \pi \cdot d_w \cdot L_w \cdot h_g \cdot [T_g - T(t)] - \frac{\pi \cdot d_w^2}{4} \cdot k_w \cdot \frac{[T(t) - T_0]}{\beta^2 \cdot L_w} \end{aligned}$$

Dividiendo todo por  $(\pi \cdot d_w \cdot L_w \cdot h_g)$  se obtiene:

$$\frac{\rho_w \cdot Cp_w \cdot d_w}{4 \cdot h_g} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = [T_g - T(t)] - \frac{1}{4} \cdot \frac{k_w}{h_g} \cdot \frac{d_w}{\beta^2 \cdot L_w^2} \cdot [T(t) - T_0]$$

### 5.4.2 Apartado 2

Reemplazando los valores  $\tau$  y  $A$  definidos en el enunciado, la ecuación obtenida en el apartado 1 se puede escribir como:

$$\tau \cdot \frac{dT(t)}{dt} = [T_g - T(t)] - A \cdot [T(t) - T_0]$$

Al final del transitorio térmico  $T(t) \rightarrow T(\infty)$  y el proceso se puede considerar estacionario. En estacionario ( $dT(t)/dt = 0$ ) por tanto el término de la izquierda de la ecuación es cero. De esta forma, la ecuación ahora se puede escribir como:

$$0 = [T_g - T(t)] - A \cdot [T(t) - T_0]$$

Operando la ecuación anterior se puede obtener una expresión para  $T(\infty)$ :

$$T(\infty) = \frac{T_g + A \cdot T_0}{1 + A}$$

### 5.4.3 Apartado 3

Primero se expresará el parámetro adimensional  $A$  en función del propuesto en la bibliografía, para ello se multiplica y divide por  $k_g \cdot d_w^2$ .

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{k_w}{h_g} \cdot \frac{d_w}{\beta^2 \cdot L_w^2} \cdot \frac{k_g}{k_g} \cdot \frac{d_w^2}{d_w^2}$$

Haciendo la inversa de  $A$  y ordenando los términos queda:

$$\frac{1}{A} = \frac{h_g \cdot d_w}{k_g} \cdot \frac{4 \cdot \beta^2 \cdot L_w^2}{d_w^2} \cdot \frac{k_g}{k_w}$$

De acuerdo con la definición del número de Nusselt referido al diámetro del hilo ( $\text{Nu}_{d_w}$ ) la expresión anterior se puede escribir como:

$$\frac{1}{A} = \text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{4 \cdot \beta^2 \cdot L_w^2}{d_w^2} \cdot \frac{k_g}{k_w}$$

Aplicando raíz cuadrada en ambos términos.

$$\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{2 \cdot \beta \cdot L_w}{d_w} \cdot \sqrt{\text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{k_g}{k_w}}$$

El término de la derecha es el parámetro definido en la bibliografía, por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{1}{A}} > 10 \quad \Rightarrow \quad A < 0,01$$

El valor del parámetro adimensional  $A$  debe ser menor que 0,01 para garantizar que la  $T(\infty)$  ha alcanzado un valor próximo a la temperatura del gas  $T_g$ .

Que el valor de  $A$  sea pequeño es coherente con la expresión obtenida en el apartado 2 para  $T(\infty)$  ya que cuando  $A \rightarrow 0$ ,  $T(\infty) \rightarrow T_g$ .

#### 5.4.4 Apartado 4

Teniendo en cuenta que el estado estacionario se alcanza cuando el parámetro adimensional definido en la bibliografía es mayor que 10.

$$2 \cdot \frac{\beta \cdot L_w}{d_w} \cdot \sqrt{\text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{k_g}{k_w}} > 10$$

Si reemplazamos el número de Nusselt en la ecuación anterior se puede escribir:

$$2 \cdot \frac{\beta \cdot L_w}{d_w} \cdot \sqrt{\frac{h_g \cdot d_w}{k_g} \cdot \frac{k_g}{k_w}} > 10$$

Para que el valor del parámetro aumente se debe aumentar la longitud  $L_w$ , disminuir el diámetro  $d_w$  y disminuir la conductividad del hilo  $k_w$ . Finalmente aumentando el coeficiente de película gas-hilo  $h_g$  también se puede hacer más grande el parámetro adimensional.

### 5.4.5 Apartado 5

Definiendo la temperatura adimensional.

$$\theta(t) = \frac{T_g - T(t)}{T_g - T_0}$$

Derivando respecto de  $t$ .

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{T_g - T_0} \cdot \frac{dT(t)}{dt}$$

Reordenando la ecuación se puede escribir:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -(T_g - T_0) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Remplazando en la ecuación diferencial obtenida en el apartado 2 se obtiene:

$$-\tau \cdot (T_g - T_0) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = [T_g - T(t)] - A \cdot [T(t) - T_0]$$

Operando se obtiene:

$$-\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = \theta(t) - A \cdot \frac{[T(t) - T_0]}{(T_g - T_0)}$$

Sumando y restando  $T_g$  en el último término de la ecuación.

$$-\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = \theta(t) - A \cdot \frac{[T(t) - T_0] + T_g - T_g}{(T_g - T_0)}$$

Operando y reordenando la ecuación se obtiene:

$$-\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = \theta(t) + A \cdot \frac{[T_g - T(t)]}{(T_g - T_0)} + A \cdot \frac{(T_0 - T_g)}{(T_g - T_0)}$$

Para finalmente obtener:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = A - \theta(t) \cdot (A + 1)$$

### Apartado 6

Para resolver la ecuación diferencial anterior, primero se reordena de la siguiente forma:

$$\frac{d\theta(t)}{A - \theta(t) \cdot (A + 1)} = \frac{dt}{\tau}$$

La integral de esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{1}{(A + 1)} \cdot \ln [\theta(t) \cdot (A + 1) - A] = -\frac{t}{\tau} + cte$$

Para hallar el valor de la constante utilizamos la condición de contorno para  $t = 0$  la temperatura adimensional  $\theta(0) = 1$ .

$$\frac{1}{(A + 1)} \cdot \ln [1 \cdot (A + 1) - A] = 0 + cte$$

$$\frac{1}{(A + 1)} \cdot \ln(1) = cte \quad \Rightarrow \quad cte = 0$$

Reemplazando el valor de la  $cte$  y reordenando se obtiene:

$$\frac{1}{(A + 1)} \cdot \ln [\theta(t) \cdot (A + 1) - A] = -\frac{t}{\tau} \cdot (A + 1)$$

$$\theta(t) = \frac{e^{(-t/\tau) \cdot (1+A)} + A}{1 + A}$$

### Apartado 7

La forma de la gráfica será una exponencial decreciente desde el valor  $\theta(0) = 1$  hasta el valor de  $\theta(\infty) = A/(1 + A)$  como se muestra en la figura siguiente.

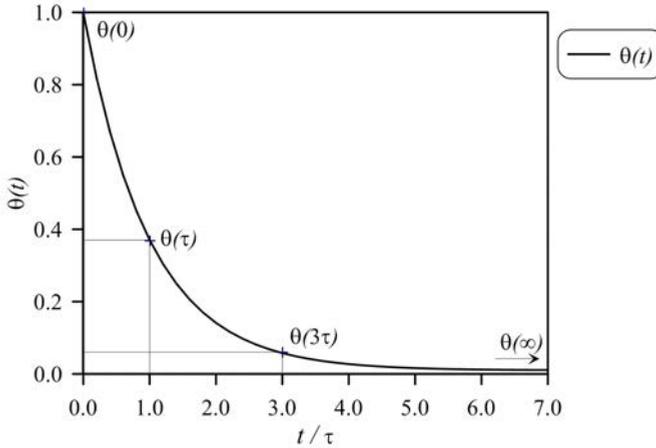


Figura 5.4.1: Varaiación de  $\theta(t)$  en función de  $t/\tau$ .

Los valores correspondientes para cada uno de los puntos indicados en la figura 5.4.1 se pueden calcular a partir de la ecuación del apartado anterior.

### Apartado 8

Reemplazando valores en la ecuación obtenida en el apartado 6, se obtiene los valores de  $T(\infty)$  y  $T(3\tau)$ .

Para  $t = \infty$ :

$$\theta(\infty) = \frac{e^{(-\infty/\tau) \cdot (1+A)} + A}{1 + A} = \frac{A}{1 + A} \rightarrow \theta(\infty) = \frac{0,01}{1 + 0,001} = 0,0099$$

$$\theta(\infty) = \frac{T_g - T(\infty)}{T_g - T_0} \rightarrow T(\infty) = T_g - \theta(\infty) \cdot (T_g - T_0)$$

$$T(\infty) = 700 - 0,0099 \cdot (700 - 25) = 693,3^\circ\text{C}$$

Para  $t = 3\tau$ :

$$\theta(\infty) = \frac{e^{(-3) \cdot (1+A)} + A}{1 + A} \rightarrow \theta(3\tau) = \frac{e^{(-3) \cdot (1+0,01)} + 0,01}{1 + 0,01} = 0,0577$$

$$\theta(\infty) = \frac{T_g - T(3\tau)}{T_g - T_0} \rightarrow T(3\tau) = T_g - \theta(3\tau) \cdot (T_g - T_0)$$

$$T(3\tau) = 700 - 0,0577 \cdot (700 - 25) = 661,0^\circ\text{C}$$

Como puede observarse de los resultados obtenidos, la temperatura de equilibrio  $T(\infty)$  difiere de la temperatura del gas en  $6,7^\circ\text{C}$  lo que representa un error de medida menor del 1%. El valor de  $T(3\tau)$  que en teoría debería ser el 95% del valor de la temperatura del gas, en este caso representa el 94,4% debido a las pérdidas de calor por conducción en el hilo.

## Apartado 9

Para calcular el número de Reynolds, primero hay que saber la velocidad del fluido, de acuerdo con el enunciado el número de Mach es 1, por lo tanto, la velocidad del fluido es la velocidad del sonido en las condiciones del problema.

La velocidad del sonido se calcula como:

$$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T} = \sqrt{1,35 \cdot 273 \cdot (700 + 273)}$$

$$a = 598,8 \text{ m/s}$$

Conocida la velocidad del fluido se procede a calcular el número de Reynolds referido al diámetro del hilo.

$$\text{Re}_{d_w} = \frac{a \cdot d_w}{\nu_g} = \frac{598,8 \cdot 0,0001}{1,1 \cdot 10^{-4}}$$

$$\text{Re}_{d_w} = 544,4$$

## Apartado 10

Para calcular el número de Nusselt se utiliza la correlación propuesta por Zhukauskas para flujo externo transversal a un cilindro.

$$\text{Nu}_{d_w} = C \cdot \text{Re}_{d_w}^m \cdot \text{Pr}^n \cdot \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_s} \right)^{1/4}$$

Las propiedades deben ser evaluadas a la temperatura de gas  $T_g$ , excepto  $\text{Pr}_s$  que se evalúa a la temperatura de la pared del cilindro.

Los valores de las constantes dependen del número de Reynold y de Prandlt, y para este problema son:

Para  $40 < \text{Re}_{d_w} < 1000 \rightarrow C = 0,51$  y  $m = 0,5$

Para  $\text{Pr} < 10 \rightarrow n = 0,37$

De acuerdo con el enunciado, el  $\text{Pr}$  a la temperatura del gas ( $700^\circ\text{C}$ ) es 0,723 y el  $\text{Pr}$  a la temperatura  $T_0$  ( $25^\circ\text{C}$ ) es 0,707. El error al aplicar esta correlación viene dado por la elección de la temperatura de la pared del cilindro. En este caso esta temperatura variará desde  $T_0$  hasta  $T_\infty$  que es muy cercana a la temperatura del gas.

Se calculará el número de Nusselt para los dos extremos y con esto se valorará el máximo error que se puede cometer.

Temperatura de la superficie  $T_0$ :

$$\text{Nu}_{d_w} = 0,51 \cdot 544,4^{0,5} \cdot 0,723^{0,37} \cdot \left( \frac{0,73}{0,707} \right)^{1/4} = 10,61$$

Temperatura de la superficie  $T_g$ :

$$\text{Nu}_{d_w} = 0,51 \cdot 544,4^{0,5} \cdot 0,723^{0,37} \cdot \left( \frac{0,73}{0,723} \right)^{1/4} = 10,55$$

Teniendo en cuenta estos dos valores el error máximo que podemos cometer es el 0,56 %, por lo tanto, es prácticamente igual utilizar un valor u otro.

El coeficiente de película se despeja de la definición del número de Nusselt.

$$\text{Nu}_{d_w} = \frac{h_g \cdot d_w}{k_g} \quad \Rightarrow \quad h_g = \frac{\text{Nu}_{d_w} \cdot k_g}{d_w}$$

$$h_g = \frac{10,61 \cdot 0,064}{0,0001} = 6790,4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

### Apartado 11

Para calcular el tiempo característico reemplazamos los valores de las propiedades en la siguiente ecuación:

$$\tau = \frac{Cp_w \cdot \rho_w \cdot d_w}{4 \cdot h_g}$$

Tiempo característico del Cromel:

$$\tau = \frac{8730 \cdot 448 \cdot 0,0001}{4 \cdot 6790,4} = 0,0144 \text{ s}$$

Tiempo característico del Alumel:

$$\tau = \frac{8600 \cdot 523 \cdot 0,0001}{4 \cdot 6790,4} = 0,0166 \text{ s}$$

De acuerdo a estos valores el tiempo característico del Cromel es un 13,2% inferior que el Alumel.

Para calcular el parámetro  $\beta \cdot L_w/d_w$  lo despejamos de la condición que debe cumplirse para que  $T(\infty) \sim T_g$ .

$$2 \cdot \frac{\beta \cdot L_w}{d_w} \cdot \sqrt{\text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{k_g}{k_w}} > 10$$

$$\frac{\beta \cdot L_w}{d_w} > 5 \cdot \left( \text{Nu}_{d_w} \cdot \frac{k_g}{k_w} \right)^{-0,5}$$

Para el Cromel:

$$\frac{\beta \cdot L_w}{d_w} > 5 \cdot \left( 10,61 \cdot \frac{0,064}{19} \right)^{-0,5} = 26,45$$

Para el Alumelel:

$$\frac{\beta \cdot L_w}{d_w} > 5 \cdot \left( 10,61 \cdot \frac{0,064}{28} \right)^{-0,5} = 32,11$$

De acuerdo a los valores obtenidos se puede decir que a igualdad de diámetro el Cromel necesita una longitud de hilo más pequeña.

## Apartado 12

Para que la hipótesis supuesta en el apartado 1 de temperatura uniforme en todo el hilo se cumple, el número de Biot debe ser menor que 0,1.

Para el Cromel:

$$\text{Bi}_{Cr} = \frac{h_g \cdot d_w}{k_{Cr}} = \frac{6790,4 \cdot 0,0001}{19} = 0,0357$$

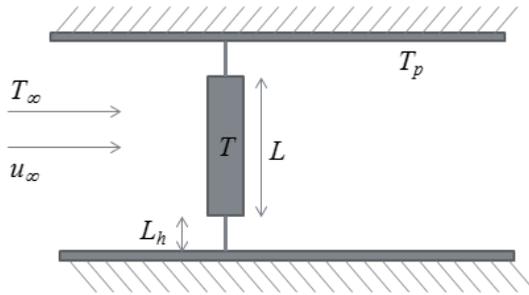
Para el Alumelel:

$$\text{Bi}_{Al} = \frac{h_g \cdot d_w}{k_{Al}} = \frac{6790,4 \cdot 0,0001}{28} = 0,0242$$

Por tanto la hipótesis del apartado 1 resulta razonable en cualquiera de los casos.

## 5.5 Cilindro en una corriente de aire

Un cilindro de acero inoxidable está montado en una corriente de aire como se muestra en la figura. Inicialmente está a una temperatura uniforme  $T_i = 70^\circ\text{C}$ , y se expone a un flujo de aire a temperatura constante  $T_\infty = 27^\circ\text{C}$ . Cuando  $t = 1$  minuto un micro-termopar mide en la superficie del cilindro una temperatura de  $T_s = 65^\circ\text{C}$ . A los efectos de cálculo se puede considerar que la temperatura de las paredes por donde circula el aire es  $T_p = T_\infty$ .



Geometría del cilindro:  $L = 0,1 \text{ m}$      $D_c = 0,015 \text{ m}$

Geometría del hilo que soporta el cilindro:  $L_h = 0,01 \text{ m}$      $D_h = 0,002 \text{ m}$

Las propiedades del aire y del material del cilindro son:

Datos del Aire:

$$\rho_{ai} = 1,17 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{ai} = 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\mu_{ai} = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\text{Pr} = 0,725$$

Datos del acero inoxidable:

$$\rho_{ac} = 8240 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{ac} = 13,5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$Cp_{ac} = 470 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\alpha_{ac} = 3,48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Se pide:

1. Plantear la ecuación de la energía teniendo en cuenta todos los mecanismos de transmisión de calor posibles en el cilindro, aceptando que los hilos que soportan el cilindro están a la temperatura del cilindro y sólo intercambian calor por conducción hacia la pared, siendo la convección y la radiación de éstos despreciable.
2. Demostrar que la ecuación del apartado 1 se puede escribir de forma adimensional como:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot A_h}{\text{Bi} \cdot A_c} + \text{Pl} \cdot \left( \frac{T(t)^2}{T_\infty^2} + 1 \right) \cdot \left( \frac{T(t)}{T_\infty} + 1 \right) \right]$$

Siendo,

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} ; \text{Bi} = \frac{h \cdot L_h}{k_h} ; \tau = \frac{V_c \cdot \rho_c \cdot Cp_c}{A_c \cdot h}$$

$$\text{Pl} = \frac{\epsilon \cdot \sigma \cdot T_\infty^3}{h} ; A_c = \pi \cdot D_c \cdot L_c ; A_h = \pi \cdot D_h^2 / 4$$

3. Calcular la temperatura del cilindro en estado estacionario si sólo consideramos la transmisión de calor por convección entre el cilindro y el aire.
4. Suponiendo que para el tiempo  $t = 1$  minuto la temperatura del cilindro es homogénea, determinar el coeficiente de película aire-cilindro y el número de Nusselt ( $\text{Nu}_D$  referido al diámetro del cilindro).
5. Con los datos del apartado anterior determinar el número de Fourier y el número de Biot. A la vista de los resultados justificar si la hipótesis de cálculo realizada en el apartado 4 en lo referente a la uniformidad de temperaturas en el cilindro es aceptable o no.
6. Determinar el tiempo necesario para reducir la temperatura del cilindro hasta  $32^\circ\text{C}$ .
7. Suponiendo que utilizamos la correlación de Hilpert como modelo de la expresión del número de Nusselt, determinar el número de Reynolds ( $\text{Re}_D$ ) y la velocidad del flujo de aire alrededor del cilindro.

Correlación de Hilper:  $\text{Nu}_D = C \cdot \text{Re}_D^m \cdot \text{Pr}^{1/3}$

8. Si aumentamos la velocidad de la corriente de aire alrededor del cilindro en un factor 100, justificar si la hipótesis de temperatura homogénea en el cilindro sigue siendo válida.
9. Si la respuesta al apartado 8 es negativa, es decir, la hipótesis de temperatura homogénea en el cilindro es cuestionable, calcular con los nuevos valores y para  $t = 1$  minuto la temperatura en el eje del cilindro y la temperatura en la superficie del cilindro.

## Apartado 1

El problema es un transitorio térmico donde el cilindro se enfría intercambiando calor con el aire por convección, transmitiendo una cantidad de calor por conducción a través de los hilos y por radiación hacia las paredes. Por lo tanto, la ecuación de la energía debe tener en cuenta estas tres formas de transmisión de calor y el término de acumulación debido a que el problema es transitorio.

$$V_c \cdot \rho_c \cdot Cp_c \cdot \frac{dT(t)}{dt} = -\dot{q}_{conv.c} - \dot{q}_{cond.h} - \dot{q}_{rad.c-p}$$

Siendo  $V_c$  el volumen del cilindro,  $\rho_c$  y  $Cp_c$  son la densidad y el calor específico del cilindro respectivamente.

$$\dot{q}_{conv.c} = A_c \cdot h \cdot [T(t) - T_\infty]$$

Siendo  $A_c$  el área expuesta del cilindro.

$$\dot{q}_{conv.h} = 2 \cdot \frac{A_h \cdot k_h}{L_h} \cdot [T(t) - T_p]$$

Siendo  $A_h$  el área transversal del hilo.

$$\dot{q}_{rad.c-p} = \epsilon \cdot \sigma \cdot A_c \cdot [T(t)^4 - T_p^4]$$

Donde  $\epsilon$  es la emisividad del cilindro y  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann.

Teniendo en cuenta que la temperatura de la pared  $T_p$  se puede considerar igual a la temperatura de la corriente de aire  $T_\infty$ , la ecuación se puede escribir como:

$$V_c \cdot \rho_c \cdot Cp_c \cdot \frac{dT(t)}{dt} = -A_c \cdot h \cdot [T(t) - T_\infty] - 2 \cdot \frac{A_h \cdot k_h}{L_h} \cdot [T(t) - T_\infty] - \epsilon \cdot \sigma \cdot A_c \cdot [T(t)^4 - T_\infty^4]$$

## Apartado 2

Para adimensionalizar la ecuación obtenida en el apartado anterior se dividen todos los términos por  $A_c \cdot h \cdot (T_i - T_\infty)$ .

$$\frac{V_c \cdot \rho_c \cdot Cp_c}{A_c \cdot h \cdot (T_i - T_\infty)} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = - \frac{[T(t) - T_\infty]}{(T_i - T_\infty)} - 2 \cdot \frac{A_h \cdot k_h}{A_c \cdot h \cdot L_h} \cdot \frac{[T(t) - T_\infty]}{(T_i - T_\infty)} - \frac{\epsilon \cdot \sigma}{h} \cdot \frac{[T(t)^4 - T_\infty^4]}{(T_i - T_\infty)}$$

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en el enunciado para los parámetros adimensionales,  $\theta(t)$ , Bi, Pl y  $\tau$ , la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) - \frac{2}{\text{Bi}} \cdot \frac{A_h}{A_c} \cdot \theta(t) - \frac{\text{Pl}}{T_\infty^3} \cdot \frac{[T(t)^4 - T_\infty^4]}{(T_i - T_\infty)}$$

Operando convenientemente el término de la derecha se puede obtener:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) \cdot \left[ 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \cdot \frac{A_h}{A_c} + \frac{\text{Pl}}{T_\infty^3} \cdot [(T(t)^2 + T_\infty^2) \cdot (T(t) + T_\infty)] \right]$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot A_h}{\text{Bi} \cdot A_c} + \text{Pl} \cdot \left( \frac{T(t)^2}{T_\infty^2} + 1 \right) \cdot \left( \frac{T(t)}{T_\infty} + 1 \right) \right]$$

## Apartado 3

Si despreciamos los efectos de la conducción y la radiación la ecuación obtenida en el apartado anterior se puede escribir como:

$$\tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t)$$

En estado estacionario el término de variación de temperatura en el tiempo es nulo y por lo tanto:

$$0 = -\theta(t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0$$

Por lo tanto la temperatura en el cilindro  $T(t)$  en el estacionario debe ser igual a  $T_\infty$ .

$$T(t) = T_\infty$$

#### Apartado 4

Si consideramos que la temperatura en el cilindro es uniforme y el único enfriamiento de éste es por convección a través de su superficie, la ecuación de la variación de temperatura en el tiempo se calcula como:

$$\theta(t) = e^{-t/\tau}$$

De la ecuación anterior se puede despejar el valor de  $\tau$ .

$$\ln \theta(t) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{t}{\ln \theta(t)}$$

Para  $t = 60$  s, se halla  $\theta(60\text{s})$ .

$$\theta(60\text{s}) = \frac{T(60\text{s}) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{65 - 27}{70 - 27} = 0,8837$$

Reemplazando valores numéricos se obtiene el tiempo característico  $\tau$ .

$$\tau = -\frac{60}{\ln 0,8837} = 485,38 \text{ s}$$

De la definición de  $\tau$  se puede despejar el valor de  $h$ .

$$\tau = \frac{V_c \cdot \rho_c \cdot Cp_c}{A_c \cdot h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_c \cdot Cp_c}{\tau} \cdot \frac{V_c}{A_c}$$

$$h = \frac{\rho_c \cdot Cp_c}{\tau} \cdot \frac{L_c \cdot \pi \cdot D_c^2/4}{L_c \cdot \pi \cdot D_c} = \frac{\rho_c \cdot Cp_c}{\tau} \cdot \frac{D_c}{4}$$

Teniendo en cuenta que el cilindro es de acero inoxidable, se reemplazan los valores de las propiedades, obteniendo:

$$h = \frac{8240 \cdot 470}{485,38} \cdot \frac{0,015}{4} = 29,92 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Obtenido el valor del coeficiente de película, se puede calcular el número de Nusselt referido al diámetro del cilindro.

$$\text{Nu}_D = \frac{h \cdot D_c}{k_{ai}} = \frac{29,92 \cdot 0,015}{0,026} = 17,26$$

### Apartado 5

Para calcular los números adimensionales de Biot y Fourier se utiliza como longitud característica la relación  $V_c/A_c = D/4$ .

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot D_c/4}{k_{ac}} = \frac{29,92 \cdot 0,015/4}{13,5} = 0,083$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{(D_c/4)^2} = \frac{3,48 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{0,015/4} = 14,848$$

Teniendo en cuenta que el número de Bi  $< 0,1$ , la hipótesis de temperatura homogénea en el cilindro se puede considerar como válida.

### Apartado 6

El tiempo  $t$  necesario para que el cilindro alcance la temperatura de  $32^\circ\text{C}$  se puede despejar de la ecuación utilizada en el apartado 4, caracterizada en este caso para  $T(t) = 32^\circ\text{C}$ .

$$\theta(t) = e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln \theta(t) = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau \cdot \ln \theta(t)$$

Reemplazando valores numéricos para  $T(t) = 32^\circ\text{C}$ , se obtiene.

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{32 - 27}{70 - 27} = 0,1163$$

$$t = -485,38 \cdot \ln 0,1163 = 1044,4 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad t = 17\text{m } 24,4\text{s}$$

## Apartado 7

Assumiendo que el cálculo del número de Nusselt se ha realizado con la correlación de Hilpert se puede recorrer el camino inverso y hallar el número de Reynolds a partir de los datos obtenidos previamente.

$$\text{Nu}_D = C \cdot \text{Re}_D^m \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \text{Re}_D = \left( \frac{\text{Nu}_D}{C \cdot \text{Pr}^{1/3}} \right)^{1/m}$$

Los valores de  $C$  y  $m$  de la correlación de Hilpert se encuentran en la tabla siguiente y como puede observarse dependen del número de Reynolds.

$\text{Re}_D$	$C$	$m$
0,4 – 4	0,989	0,330
4 – 40	0,911	0,285
40 – 4000	0,683	0,466
4000 – 40000	0,193	0,618
40000 – 400000	0,027	0,805

Para saber que valores hay que usar se deben calcular los números de Reynolds utilizando todos los pares de valores y verificar cuales son los valores adecuados en función del valor obtenido.

Para este caso particular el número de Reynolds siempre está en el rango de 40-4000 independientemente del valor adoptado para  $C$  y  $m$ , por lo tanto, serán los valores  $C = 0,683$  y  $m = 0,466$  los elegidos para calcular el número de Reynolds.

$$\text{Re}_D = \left( \frac{17,26}{0,683 \cdot 0,725^{1/3}} \right)^{1/0,466} = 1288,02$$

A partir de la definición del número de Reynolds se puede calcular la velocidad de la corriente de aire.

$$\text{Re}_D = \frac{\rho_{ai} \cdot u_\infty \cdot D_c}{\mu_{ai}} \quad \Rightarrow \quad u_\infty = \frac{\text{Re}_D \cdot \mu_{ai}}{\rho_{ai} \cdot D_c}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$u_\infty = \frac{1288,02 \cdot 1,86 \cdot 10^{-5}}{1,17 \cdot 0,015} = 1,365 \text{ m/s}$$

## Apartado 8

Si la velocidad se incrementa en un factor de 100, el número de Reynolds se incrementa en la misma proporción, por tanto ahora  $Re_D = 128802$ . En estas condiciones las constantes de la correlación de Hilpert son:

$$40000 > Re_D > 400000 \quad \Rightarrow \quad C = 0,027 \quad ; \quad m = 0,805$$

Con estos valores el nuevo número de Nusselt es:

$$Nu_D = C \cdot Re_D^m \cdot Pr^{1/3} = 0,027 \cdot 128802^{0,805} \cdot 0,725^{1/3} = 314,99$$

De la definición del número de Nusselt se obtiene el nuevo valor para el coeficiente de película  $h$ .

$$Nu_D = \frac{h \cdot D_c}{k_{ai}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{Nu_D \cdot k_{ai}}{D_c}$$

$$h = \frac{314,99 \cdot 0,026}{0,015} = 545,98 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Con este valor de coeficiente de película el número de Biot es:

$$Bi = \frac{h \cdot D_c/4}{k_{ac}} = \frac{545,98 \cdot 0,015/4}{13,5} = 0,152$$

Teniendo en cuenta que el número de  $Bi > 0,1$ , la hipótesis de temperatura homogénea en el cilindro ya no se puede considerar como válida.

## Apartado 9

La solución aproximada cuando  $Fo > 0,2$  para un problema de transferencia de calor no estacionario unidimensional con simetría cilíndrica, es:

$$\theta(r, t) = \frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0 \cdot J_0(\xi_1 \cdot r^*)$$

Donde  $J_0$  es la función de Bessel de primera especie de orden cero y  $\theta_0$  la temperatura adimensional del centro del cilindro.

$$\theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$$

Donde  $C_1$  y  $\xi_1$  son coeficientes tabulados en función del número de Biot.

Siendo:

$$r^* = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{D_c/2} ; \quad \text{Bi} = \frac{h \cdot r_0}{k_{ac}} ; \quad \text{Fo} = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{r_0^2}$$

El primer paso para la resolución del apartado es calcular el número de Fourier y verificar que es mayor que 0,2, para posteriormente, calcular el número de Biot y obtener los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\xi_1$ . Es importante destacar que la elección de la longitud característica de los números adimensionales (Bi y Fo) ha cambiado, respecto a las utilizadas en los apartados anteriores, ya que las constantes  $C_1$  y  $\xi_1$  están definidas para un número de Biot calculado con  $r_0$  como longitud característica.

$$\text{Fo} = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{D_c/2^2} = \frac{3,48 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{(0,015/2)^2} = 3,712$$

Teniendo en cuenta el valor obtenido, se puede utilizar la aproximación de la solución general.

El número de Biot con la nueva longitud característica es:

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot (D_c/2)}{k_{ac}} = \frac{545,98 \cdot (0,015/2)}{13,5} = 0,3033$$

Con  $\text{Bi} = 0,3033$ , los valores de los coeficientes son:

$$C_1 = 1,072 \quad \text{y} \quad \xi_1 = 0,750$$

Reemplazando estos valores en la ecuación correspondiente, podemos obtener la temperatura en el centro del cilindro:

$$\theta_0 = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot \text{Fo})} = 1,072 \cdot e^{-(0,750^2 \cdot 3,712)} = 0,1328$$

$$\theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \Rightarrow \quad T(0, t) = \theta_0 \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty$$

$$T(0, 60\text{s}) = 0,1328 \cdot (70 - 27) + 27 = 32,7^\circ\text{C}$$

Para calcular la temperatura en la pared del cilindro, primero se halla la función de Bessel.

En la superficie  $r^* = r/r_0 = 1$ , de tablas se obtiene:

$$J_0(\xi_1 \cdot r^*) = J_0(0,750) = 0,8637$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\theta(r_0, t) = \theta_0 \cdot J_0(\xi_1 \cdot 1) = 0,1328 \cdot 0,8637 = 0,1147$$

$$\theta(r_0, t) = \frac{T(r_0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \Rightarrow \quad T(r_0, t) = \theta(r_0, t) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty$$

$$T(r_0, 60\text{s}) = 0,1147 \cdot (70 - 27) + 27 = 31,9^\circ\text{C}$$

Como se observa, la diferencia de temperatura entre el centro y la superficie no es demasiada elevada, esto se debe a que el número de Biot aunque mayor que 0,1, no es demasiado grande como para que los gradientes térmicos dentro del cilindro sean importantes.

## 5.6 Transitorio térmico de una esfera

Una esfera de cobre de diámetro  $d_0 = 12$  mm, inicialmente a una temperatura uniforme  $T_i = 66^\circ\text{C}$ , se expone a un flujo de aire a temperatura constante  $T_\infty = 27^\circ\text{C}$ . Cuando  $t = 70$  segundos un micro-termopar mide en la superficie de la esfera una temperatura  $T_F = 55^\circ\text{C}$ .

Las propiedades del aire y del cobre se pueden considerar constantes y son:

Datos del Aire:

$$k_{ai} = 0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{ai} = 1,17 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_{ai} = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\text{Pr} = 0,707$$

Datos del cobre:

$$k_{cu} = 401 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{cu} = 8933 \text{ kg/m}^3$$

$$\alpha_{cu} = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Cp_{cu} = 385 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Se pide:

1. Suponiendo que para el tiempo  $t = 70$  s la temperatura de la esfera de cobre es homogénea, determinar el coeficiente de película aire-esfera y el número de Nusselt.
2. Con los datos del apartado anterior determinar el número de Fourier y el número de Biot. Utilizar como longitud característica la relación volumen/superficie.
3. A la vista de los resultados del apartado anterior justificar si la hipótesis de cálculo realizada en el apartado 1 en lo referente a la uniformidad de temperaturas en la esfera es aceptable o no.
4. Determinar el tiempo necesario para reducir la temperatura de la esfera hasta  $30^\circ\text{C}$ .
5. Suponiendo que utilizamos la correlación de Ranz y Marshall como modelo de la expresión del número de Nusselt, determinar el número de Reynolds y la velocidad del flujo de aire alrededor de la esfera.

$$\text{Nu} = 2 + 0,6 \cdot \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad (\text{Ranz y Marshall})$$

6. Si se define ahora el número de Biot ( $\text{Bi}^*$ ) con una longitud característica  $r_0$  (radio de la esfera), demostrar que para valores del número de Reynolds suficientemente grandes y partiendo de la correlación de Ranz y Marshall se puede escribir que:

$$\text{Bi}^* = 0,3 \cdot \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot (k_{ai}/k_{cu})$$

7. Si aumentamos el número de Reynolds del flujo alrededor de la esfera en un factor 100, ¿sería aceptable asumir la hipótesis de temperatura constante en la esfera?
8. Si además del incremento en el número de Reynolds, la esfera en vez de ser de cobre fuera de un material aislante con un coeficiente de conductividad térmica  $k_m = 1,6 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ , ¿seguiría siendo aceptable la hipótesis de temperatura homogénea?
9. Si la respuesta al apartado 8 es negativa, es decir la hipótesis de temperatura homogénea en la esfera es cuestionable, calcular para  $t = 70 \text{ s}$  la temperatura en el centro de la esfera,  $T_{FO}$ , y la temperatura en la superficie de la esfera  $T_{FS}$ . Para ello suponer dos materiales aislantes con la misma conductividad térmica del apartado 8, pero con difusividades térmicas diferentes,  $\alpha_{m1} = 7,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\alpha_{m1} = 8,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

### Apartado 1

Suponer que la temperatura es homogénea en toda la esfera para  $t = 70 \text{ s}$ , implica aceptar que se puede considerar la resistencia térmica interna de la esfera despreciable.

Para este tipo de problema la solución del transitorio térmico se puede expresar como:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-t/\tau}$$

Siendo el tiempo característico:

$$\tau = \frac{\rho \cdot Cp \cdot V}{h \cdot A}$$

De la ecuación anterior se puede despejar  $\tau$ , para luego obtener el valor de  $h$ .

$$\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{t}{\ln \left( \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)}$$

Reemplazando valores para  $t = 70$  s, se obtiene:

$$\tau = -\frac{70}{\ln\left(\frac{55-27}{66-27}\right)} = 211,25 \text{ s}$$

De la definición del tiempo característico se puede despejar el valor  $h$ , teniendo en cuenta que la relación volumen/área para una esfera es  $r_0/3$ .

$$\tau = \frac{\rho \cdot Cp \cdot V}{h \cdot A} \Rightarrow h = \frac{\rho \cdot Cp \cdot r_0/3}{\tau}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$h = \frac{8933 \cdot 385 \cdot 0,006/3}{211,25} = 32,56 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

El número de Nusselt se puede calcular a partir de su definición para una esfera de diámetro  $d_0$  como:

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot d_0}{k_{ai}} = \frac{32,56 \cdot 0,012}{0,026} = 15,03$$

Observar que la longitud característica para determinar el tiempo  $\tau$  y para determinar el número de Nusselt son diferentes por definición.

El cociente  $t/\tau = 0,33$  indica que el transitorio en la esfera está lejos de finalizar. La condición de fin de transitorio puede establecerse en  $t/\tau = 3$ , que es cuando se alcanza el 95 % del transitorio térmico.

## Apartado 2

Reemplazando los valores en la definición del número de Fourier y de Biot se pueden calcular los valores correspondientes. Tal como dice el enunciado, se utilizará como longitud característica la relación volumen/área para la esfera que es  $r_0/3$ .

$$\text{Fo} = \frac{\alpha_{cu} \cdot t}{(r_0/3)^2} = \frac{0,117 \cdot 10^{-3} \cdot 70}{(0,006/3)^2} = 2047,5$$

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot (r_0/3)}{k_{cu}} = \frac{32,56 \cdot (0,006/3)}{401} = 1,624 \cdot 10^{-4}$$

### Apartado 3

La hipótesis de temperatura homogénea en todo el cuerpo es válida ya que el número de Biot es  $\ll 0,1$ .

En lo que respecta al número de Fourier, valores altos implican que el transitorio está adelantado, y por lo tanto, nos acercamos a la solución de equilibrio asintótica. Respecto a valores cuantitativos en este tipo de problemas hay que tener en cuenta que  $t/\tau = \text{Bi} \cdot \text{Fo}$ , por lo tanto, un valor aceptable de Fo para un final del transitorio sería  $\text{Fo} = 3/\text{Bi}$ . En este caso el valor es de 18472,9 y por lo tanto, mucho mayor que el calculado en el apartado anterior.

### Apartado 4

A partir de la solución planteada en el apartado 1 se puede despejar el tiempo necesario para alcanzar la temperatura de 30°C.

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad t = -\tau \cdot \ln \left( \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)$$

Reemplazando los valores numéricos se obtiene:

$$t = -211,25 \cdot \ln \left( \frac{30 - 27}{66 - 27} \right) = 541,8 \text{ s}$$

### Apartado 5

A partir de la correlación de Ranz y Marshall y el valor del número de Nusselt obtenido en el apartado 1 se puede estimar el número de Reynolds del problema.

$$\text{Nu} = 2 + 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \text{Re} = \left[ \frac{(\text{Nu} - 2)}{0,6 \cdot \text{Pr}^{1/3}} \right]^2$$

$$\text{Re} = \left[ \frac{(15,03 - 2)}{0,6 \cdot 0,707^{1/3}} \right]^2 = 594,05$$

El número de Reynolds obtenido,  $10^2 < \text{Re} < 10^3$  indica que el flujo alrededor de la esfera está en la zona de transición laminar/turbulento.

A partir del número de Reynolds obtenido se puede calcular la velocidad del flujo alrededor de la esfera.

$$\text{Re} = \frac{\rho_{ai} \cdot u \cdot d_0}{\mu_{ai}} \Rightarrow u = \frac{\text{Re} \cdot \mu_{ai}}{\rho_{ai} \cdot d_0}$$

$$u = \frac{594,05 \cdot 1,86 \cdot 10^{-5}}{1,17 \cdot 0,012} = 0,79 \text{ m/s}$$

## Apartado 6

Si el número de Reynolds es lo suficientemente grande, la correlación de Ranz y Marshall puede aproximarse de la siguiente forma sin cometer un error demasiado importante:

$$\text{Nu} = 2 + 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} \Rightarrow \text{Nu} = 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Teniendo en cuenta la definición del número de Nusselt, la correlación anterior se puede escribir como:

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot d_0}{k_{ai}} = 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

De acuerdo al enunciado el número de Biot ( $\text{Bi}^*$ ) se define como:

$$\text{Bi}^* = \frac{h \cdot r_0}{k_{cu}} \Rightarrow h = \frac{\text{Bi}^* \cdot k_{cu}}{r_0}$$

Reemplazando la expresión de  $h$  obtenida en la correlación del número de Nusselt.

$$\text{Nu} = \frac{\text{Bi}^* \cdot k_{cu}}{r_0} \cdot \frac{d_0}{k_{ai}} = 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

$$\text{Bi}^* = 0,3 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \frac{k_{ai}}{k_{cu}}$$

También podemos escribir:

$$\text{Bi}^* = 0,5 \cdot \text{Nu} \cdot \frac{k_{ai}}{k_{cu}}$$

Para este tipo de problemas el número de Biot y el de Nusselt se escalan con el cociente de las conductividades térmicas, fluido/material de la esfera, siendo el coeficiente 0,5, debido a la definición de Nu y Bi.

### Apartado 7

Si el número de Reynolds ahora pasa a tener un valor 100 veces mayor, el número de Nusselt, de acuerdo con la correlación propuesta, crecerá en un factor de orden 10.

$$\text{Nu} = 2 + 0,6 \cdot \text{Re}^{0,5} \cdot \text{Pr}^{1/3} = 2 + 0,6 \cdot 59405^{0,5} \cdot 0,707^{1/3} = 132,28$$

A partir del número de Nusselt se puede hallar el nuevo valor del coeficiente de película  $h$ .

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot d_0}{k_{ai}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\text{Nu} \cdot k_{ai}}{d_0}$$

$$h = \frac{132,2 \cdot 0,026}{0,012} = 286,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Reemplazando el valor de  $h$  en la definición del número de Biot, se obtiene:

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot (r_0/3)}{k_{cu}} = \frac{286,6 \cdot (0,006/3)}{401} = 1,429 \cdot 10^{-3}$$

La hipótesis de temperatura homogénea continúa siendo válida ya que el número de Biot es  $\ll 0,1$ .

Si se calcula el número de Biot ( $\text{Bi}^*$ ) definido en el apartado 6 utilizando como longitud característica el radio  $r_0$  en lugar de la relación volumen/área,  $r_0/3$ , el valor de  $\text{Bi}^*$  será tres veces más grande que Bi, y aun así, seguirá siendo menor que 0,1, por lo tanto, la hipótesis de homogeneidad de temperatura sigue siendo válida.

Debido al incremento del número de Reynolds la situación del flujo alrededor de la esfera es turbulento.

## Apartado 8

Si además del incremento del número de Reynolds del apartado anterior, ahora se considera una esfera de un material diferente ( $m$ ), el número de Biot tiene el siguiente valor:

$$\text{Bi}^* = \frac{h \cdot r_0}{k_{cu}} = \frac{286,6 \cdot 0,006}{1,6} = 1,075$$

Por tanto la hipótesis de temperatura homogénea en todo el cuerpo ya no es válida, ya que  $\text{Bi}^* > 0,1$ . En este caso, al contrario que en la primera parte del problema, la resistencia térmica de la esfera no es despreciable.

## Apartado 9

Teniendo en cuenta que los dos materiales tienen la misma conductividad térmica, el valor del número de Biot en ambos casos será el mismo que el calculado en el apartado 8,  $\text{Bi}^*_{m1} = \text{Bi}^*_{m2} = 1,075$ .

Sin embargo, el número de Fourier sí será diferente, puesto que cada material tiene una difusividad térmica diferente.

$$\text{Fo}^*_{m1} = \frac{\alpha_{m1} \cdot t}{r_0^2} = \frac{7,7 \cdot 10^{-8} \cdot 70}{0,006^2} = 0,1497$$

$$\text{Fo}^*_{m2} = \frac{\alpha_{m2} \cdot t}{r_0^2} = \frac{8,5 \cdot 10^{-7} \cdot 70}{0,006^2} = 1,6559$$

Con los valores obtenidos, sólo para el segundo material se cumple la condición de que el número de Fourier sea mayor que 0,2, y por lo tanto, sólo para este material se podría utilizar la ecuación reducida (al primer término de la serie) del campo de temperatura de una esfera.

Sin embargo, teniendo en cuenta que el número de Fourier en el primer caso es 0,1497, muy cercano a 0,2, se realizarán los cálculos para evaluar los resultados sabiendo que el error cometido en las estimaciones puede ser mayor al 5%.

La temperatura en el centro de la esfera para un instante  $t$  se obtiene a partir de:

$$\theta(0, t) = \theta_0 = \frac{T_{F0} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot \text{Fo})}$$

Donde los valores de  $C_1$  y  $\xi_1$  se obtienen para un número de Biot a partir de tablas.

Para  $Bi = 1,075 \rightarrow C_1 = 1,289$  y  $\xi_1 = 1,605$

Reemplazando valores se calcula la temperatura en el centro de la esfera para cada uno de los materiales.

Para el material ( $m_1$ ):

$$\theta_{0,m_1} = \frac{T_{F0,m_1} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1,289 \cdot e^{-(1,605^2 \cdot 0,1497)} = 0,8765$$

$$T_{F0,m_1} = \theta_{0,m_1} \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,8765 \cdot (66 - 27) + 27 = 61,17^\circ\text{C}$$

Para el material ( $m_2$ ):

$$\theta_{0,m_2} = \frac{T_{F0,m_2} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1,289 \cdot e^{-(1,605^2 \cdot 1,6559)} = 0,0181$$

$$T_{F0,m_2} = \theta_{0,m_2} \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,0181 \cdot (66 - 27) + 27 = 27,71^\circ\text{C}$$

Para obtener la temperatura en la superficie de la esfera se reemplazan los valores obtenidos para  $\theta_0$  en la siguiente ecuación:

$$\theta(r, t) = \frac{T_{FS} - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0 \cdot \frac{\text{sen}(\xi_1 \cdot (r/r_0))}{\xi_1 \cdot (r/r_0)}$$

Siendo  $r/r_0 = 1$  para la superficie de la esfera.

Para el material ( $m_1$ ):

$$\theta(r_0, t)_{m_1} = \theta_{0,m_1} \cdot \frac{\text{sen}(\xi_1 \cdot 1)}{\xi_1 \cdot 1} = 0,8765 \cdot \frac{\text{sen}(1,605)}{1,605} = 0,5458$$

$$T_{FS,m_1} = \theta(r_0, t)_{m_1} \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,5458 \cdot (66 - 27) + 27 = 48,28^\circ\text{C}$$

Para el material ( $m_2$ ):

$$\theta(r_0, t)_{m_2} = \theta_{0,m_2} \cdot \frac{\text{sen}(\xi_1 \cdot 1)}{\xi_1 \cdot 1} = 0,0181 \cdot \frac{\text{sen}(1,605)}{1,605} = 0,0113$$

$$T_{FS,m_2} = \theta(r_0, t)_{m_2} \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,0113 \cdot (66 - 27) + 27 = 27,44^\circ\text{C}$$

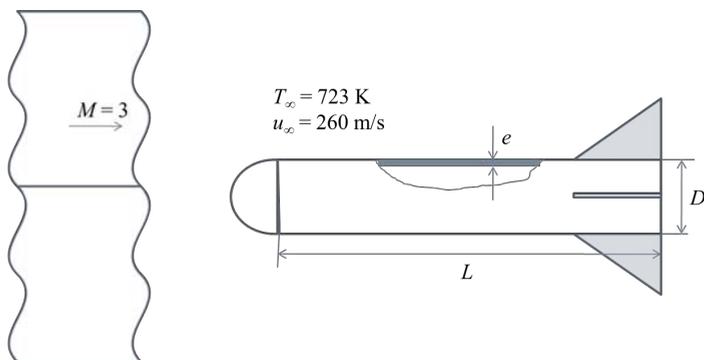
Observando los resultados obtenidos para ambos materiales, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- El número de Biot en ambos casos tiene el mismo valor (mucho mayor que 0,1) y por lo tanto, no se puede considerar la temperatura homogénea en toda la esfera.
- Las temperaturas calculadas en el centro y la superficie en el primer material son muy diferentes entre sí lo que está de acuerdo con la primera de las conclusiones, es decir, no se puede considerar la temperatura homogénea en todo el cuerpo.
- El número de Fourier para el segundo material es más grande debido a su mayor difusividad térmica y por lo tanto, el transitorio térmico será más rápido para este material.
- La utilización de las ecuaciones simplificadas para el primero de los materiales puede hacer que los resultados obtenidos tengan un error mayor al 5 %, ya que el número de Fourier es menor de 0,2.
- Sin embargo, para el segundo material, la temperatura en el centro y en la superficie son prácticamente iguales entre sí e iguales a  $T_{\infty} = 27^{\circ}\text{C}$ . Esto significa que el transitorio térmico ha sido tan rápido que para  $t = 70$  s se puede considerar que el transitorio térmico ha finalizado y todas las temperaturas están en equilibrio.

## 5.7 Aislamiento térmico de un misil

Un misil tiene una geometría cilíndrica con un diámetro exterior  $D = 0,2$  m y una longitud  $L = 3$  m, coronado por una cabeza semiesférica de diámetro  $D$  (ver figura). El fuselaje o carcasa del misil es de aluminio y sus paredes tienen un espesor  $e = 0,003$  m. Su interior contiene un gas inerte y también lleva una aviónica embarcada cuya masa consideraremos despreciable en cualquier transitorio térmico.

El misil se lanza desde un avión en el instante  $t = 0$  con una temperatura uniforme  $T_0 = 270$  K y alcanza instantáneamente una velocidad de vuelo de  $M = 3$  de tal forma que se establece una onda de choque que consideraremos plana tal como muestra la figura. Tras la onda de choque, y por tanto en contacto con el misil, la temperatura del aire es  $T_\infty = 723$  K y la velocidad relativa del aire es  $u_\infty = 260$  m/s.



El misil está diseñado para una misión cuya duración es  $t_m = 30$  s y durante este tiempo la temperatura del gas inerte en su interior no debe sobrepasar los 500 K para preservar la aviónica embarcada.

Las propiedades a considerar son:

Aire ( $ai$ ) y gas inerte ( $gi$ ):

$$Cp_{ai} = Cp_{gi} = 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{ai} = \rho_{gi} = 1 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{ai} = k_{gi} = 0,03 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\alpha_{ai} = \alpha_{gi} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\nu_{ai} = \nu_{gi} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = 0,7$$

Datos del aluminio ( $al$ ):

$$Cp_{al} = 900 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{al} = 2800 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{al} = 240 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\alpha_{al} = 9,52 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Considerar que el volumen de aluminio de forma simplificada se puede calcular como:  $V_{al} = \pi \cdot D \cdot e \cdot L$ , la superficie exterior expuesta  $A_{ex} = \pi \cdot D \cdot L$ , la longitud

característica  $Lc_{al} = V_{al}/A_{ex} = e$ , el volumen del gas inerte  $V_{gi} = \pi \cdot (D - 2e)^2 \cdot L/4$  y la superficie de contacto entre el gas inerte y el fuselaje  $A_{in} = \pi \cdot (D - 2e) \cdot L$ .

Se pide:

1. Comprobar que el calor acumulado durante el transitorio térmico en la carcasa de aluminio es mucho mayor (al menos dos órdenes de magnitud) que el acumulado en el gas inerte interior.
2. El coeficiente de fricción de un cilindro sometido a un flujo coaxial tiene la misma expresión que el de una placa plana. Determinar el número de Reynolds ( $Re_L$ ) referido a la longitud  $L$ , el número de Nusselt ( $Nu_L$ ) correspondiente y el coeficiente de película  $h_{ex}$ , teniendo en cuenta que gracias a la geometría semiesférica frontal, podemos considerar flujo turbulento desarrollado en todo el cilindro.
3. Determinar el número de Biot ( $Bi_{ex}$ ) y el número de Fourier ( $Fo_{ex}$ ) del transitorio térmico aire-carcasa de aluminio para el instante  $t = t_m$ .
4. Con la hipótesis del enunciado y los resultados obtenidos en los apartados anteriores justificar:
  - a) Que la temperatura de la carcasa de aluminio puede considerarse homogénea y por tanto dependiente únicamente del tiempo.
  - b) Que la ecuación de conservación de la energía aplicada a la carcasa de aluminio puede escribirse de forma simplificada como:

$$Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = h_{ex} \cdot A_{ex} \cdot (T_{\infty} - T(t)) - \dot{q}_{in}$$

Siendo,  $\dot{q}_{in}$  el calor por unidad de tiempo intercambiado entre la carcasa de aluminio y el gas inerte interior, que de acuerdo con el apartado 1 puede despreciarse.

5. Resolver la ecuación simplificada (despreciando el calor transferido al gas inerte) del apartado anterior considerando la condición inicial  $t = 0$ ,  $T = T_0$  y determinar el valor de la temperatura  $T = T_F$  en la carcasa de aluminio cuando  $t = t_m$  y para  $t = t_m/2$ .
6. Justificar que para resolver la evolución temporal de la temperatura del gas inerte podemos plantear la ecuación:

$$Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{gi} \cdot \frac{dT^*(t)}{dt} = h_{in} \cdot A_{in} \cdot (T_t - T^*(t))$$

Siendo:

$T^*(t)$  la temperatura instantánea del gas inerte que supondremos homogénea en todo el volumen y con condición inicial:  $t = t_0$  ;  $T^* = T_0$

$T(t)$  la temperatura instantánea de la carcasa obtenida en el apartado anterior.

7. La ecuación diferencial del apartado 6 tiene solución analítica dada por la expresión:

$$\frac{T^*(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-t/\tau^*} + \frac{1}{1 - (\tau^*/\tau)} \cdot (e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau^*})$$

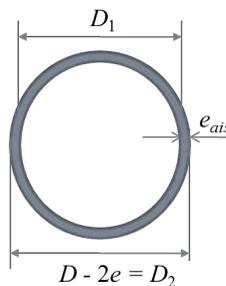
Donde:

$$\tau^* = \frac{k_{gi}}{h_{in}} \cdot \frac{Lc_{in}}{\alpha_{gi}} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{k_{al}}{h_{ex}} \cdot \frac{Lc_{al}}{\alpha_{al}}$$

Siendo:  $h_{in} = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y  $Lc_{in} = V_{in}/A_{in} = (D - 2e)/4$ .

Determinar el valor de  $T^*(15\text{s})$  y  $T^*(30\text{s})$  y comparar este último con el valor límite de 500 K propuesto en el enunciado.

8. Si  $T^*(30\text{s}) > 500 \text{ K}$ , se propone añadir un aislante interno al fuselaje del misil para garantizar que la temperatura interna no sobrepase el valor de 500 K.



Para predimensionar el aislante seguir los pasos siguientes:

- a) Confirmar que aumentando el valor de  $\tau^*$  obtenido en el apartado 7 hasta  $\tau^* = 18 \text{ s}$ , efectivamente  $T^*(30\text{s}) < 500 \text{ K}$ .

- b) Justificar que el tiempo característico de respuesta al transitorio del gas inerte cuando se añade un aislante interior a la carcasa se puede escribir como:

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1/R_{eq}}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}}$$

Siendo  $R_{eq}$  la resistencia térmica equivalente al flujo térmico por conducción a través del aislante con conductividad térmica  $k_{ais}$  y espesor  $e_{ais}$ , y por convección entre aislante y gas inerte con el mismo coeficiente de película  $h_{in}$  definido en el apartado 7.

- c) Determinar el valor de la conductividad térmica del aislante necesario si queremos que el espesor  $e_{ais}$  sea de  $10^{-3}$  m.

## Apartado 1

El calor acumulado por el aluminio y el gas inerte se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_{ac.al} &= Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot (T(30s) - T_0) \\ Q_{ac.gi} &= Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{gi} \cdot (T^*(30s) - T_0) \end{aligned}$$

Dividiendo ambas ecuaciones.

$$\frac{Q_{ac.al}}{Q_{ac.gi}} = \frac{Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot (T(30s) - T_0)}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{gi} \cdot (T^*(30s) - T_0)}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ac.al}}{Q_{ac.gi}} &= \frac{900 \cdot 2800 \cdot \pi \cdot D \cdot e \cdot L \cdot (T(30s) - T_0)}{1000 \cdot 1 \cdot \pi \cdot (D - 2e)^2 / 4 \cdot L \cdot (T^*(30s) - T_0)} \\ \frac{Q_{ac.al}}{Q_{ac.gi}} &= 160,7 \cdot \frac{(T(30s) - T_0)}{(T^*(30s) - T_0)} = 160,7 \cdot \frac{\Delta T_{al}}{\Delta T_{gi}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la temperatura del aluminio en el instante analizado,  $T(30s)$ , será siempre mayor que la temperatura del gas inerte en el mismo instante,  $T^*(30s)$ , el calor acumulado en el aluminio será siempre al menos dos órdenes de magnitud que el calor acumulado en el gas inerte.

## Apartado 2

La correlación adecuada para este problema es:

$$\text{Nu}_L = 0,037 \cdot \text{Re}_L^{0,8} \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

El número de Reynolds para este problema se puede calcular tomando como longitud característica la longitud del misil ya que el flujo de aire es coaxial con el misil.

$$\text{Re}_L = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu_{ai}} = \frac{260 \cdot 3}{2 \cdot 10^{-5}}$$

$$\text{Re}_L = 3,9 \cdot 10^7$$

Reemplazando este valor en la correlación se obtiene el número de Nusselt.

$$\text{Nu}_L = 0,037 \cdot (3,9 \cdot 10^7)^{0,8} \cdot 0,7^{1/3} = 38852,5$$

A partir de la definición del número de Nusselt se calcula el coeficiente de película entre el gas y la pared del misil.

$$\text{Nu}_L = \frac{h_{ex} \cdot L}{k_{ai}} \quad \Rightarrow \quad h_{ex} = \frac{\text{Nu}_L \cdot k_{ai}}{L}$$

$$h_{ex} = \frac{38852,5 \cdot 0,03}{3} = 388,5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

## Apartado 3

Para calcular el número de Biot y Fourier, primero se calcula la longitud característica como la relación entre el volumen y el área exterior. Si se desprecia la parte frontal esférica esta relación volumen/área se puede expresar como:

$$L_c = \frac{V_{al}}{A_{ex}} = \frac{\pi \cdot D \cdot e \cdot L}{\pi \cdot D \cdot L}$$

$$L_c = e = 0,003\text{m}$$

Reemplazando valores se calculan el número de Biot y el número de Fourier como:

$$Bi = \frac{h_{ex} \cdot L_c}{k_{al}} = \frac{388,5 \cdot 0,003}{240} = 0,00486$$

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t_m}{L_c^2} = \frac{9,85 \cdot 10^{-5} \cdot 30}{0,003^2} = 317,46$$

#### Apartado 4

- a) Teniendo en cuenta que el número de Biot es menor de 0,1, la hipótesis de temperatura homogénea en el aluminio puede considerarse válida.
- b) Los términos de la ecuación de la energía aplicada a la carcasa del misil son:
- Intercambio de calor por convección con el exterior:

$$h_{ex} \cdot A_{ex} \cdot (T_{\infty} - T(t))$$

- El calor acumulado en el aluminio:

$$Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot dT(t)/dt$$

- Intercambio de calor por convección con el gas inerte:

$$\dot{q}_{in} = h_{in} \cdot A_{in} \cdot (T(t) - T^*(t))$$

Por lo tanto, la ecuación de la energía puede expresarse como:

$$Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = h_{ex} \cdot A_{ex} \cdot (T_{\infty} - T(t)) - \dot{q}_{in}$$

#### Apartado 5

La ecuación diferencial:

$$Cp_{al} \cdot \rho_{al} \cdot V_{al} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = h_{ex} \cdot A_{ex} \cdot (T_{\infty} - T(t))$$

Tiene como solución:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-t/\tau} \quad \text{siendo} \quad \frac{t}{\tau} = \text{Fo} \cdot \text{Bi}$$

Para  $t = t_m = 30\text{s}$ , se puede calcular el tiempo característico a partir de los valores del número de Biot y Fourier obtenidos en el apartado 3.

$$\frac{t}{\tau} = \text{Fo} \cdot \text{Bi} = 317,46 \cdot 0,00486 = 1,542 \quad \Rightarrow \quad \tau = 19,458 \text{ s}$$

Despejando de la solución de la ecuación diferencial el valor de  $T(30\text{s})$  y reemplazando valores se obtiene:

$$T(30\text{s}) = e^{-t/\tau} \cdot (T_0 - T_{\infty}) + T_{\infty} = e^{-1,542} \cdot (270 - 723) + 723$$

$$T(30\text{s}) = 626,1 \text{ K}$$

Para  $t = t_m = 15\text{s}$

$$\frac{t}{\tau} = \frac{15}{19,458} = 0,771$$

$$T(15\text{s}) = e^{-t/\tau} \cdot (T_0 - T_{\infty}) + T_{\infty} = e^{-0,771} \cdot (270 - 723) + 723$$

$$T(15\text{s}) = 513,4 \text{ K}$$

## Apartado 6

Dado que la temperatura en el aluminio la podemos considerar homogénea, tal como se justificó en el apartado 4a, se puede plantear el transitorio térmico de forma que  $T_{\infty}$  ahora es la temperatura del aluminio  $T(t)$ .

$$C_{p_{gi}} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{gi} \cdot \frac{dT^*(t)}{dt} = h_{in} \cdot A_{in} \cdot (T(t) - T^*(t))$$

Siendo  $T^*(t)$  la temperatura del gas en el interior del misil.

## Apartado 7

Dado que la ecuación diferencial del apartado 6 tiene solución analítica dada por la siguiente expresión, en la que  $T_\infty$  es la temperatura del aluminio en el instante considerado.

$$\frac{T^*(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-t/\tau^*} + \frac{1}{1 - (\tau^*/\tau)} \cdot (e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau^*})$$

Se puede despejar la temperatura del gas inerte y resolver la ecuación para  $t = 30\text{s}$  y  $t = 15\text{s}$  tal como se resolvió en el apartado 5 para la temperatura del aluminio.

$$T^*(t) = \left[ e^{-t/\tau^*} + \frac{1}{1 - (\tau^*/\tau)} \cdot (e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau^*}) \right] \cdot (T_0 - T_\infty) + T_\infty$$

Primero se debe calcular el tiempo característico  $\tau^*$  para el gas inerte. Para ello, se define como longitud característica del interior del misil a la relación volumen/área de forma similar a como se realizó en el apartado 3 para el exterior del misil.

$$L_{c.in} = \frac{V_{in}}{A_{in}} = \frac{\pi \cdot (D - 2e)^2 / 4 \cdot L}{\pi \cdot (D - 2e) \cdot L} = (D - 2e) / 4 = 0,0485$$

Con este valor de longitud característica se puede calcular el tiempo característico de acuerdo a como está definido en el enunciado.

$$\tau^* = \frac{k_{gi}}{h_{in}} \cdot \frac{L_{c.in}}{\alpha_{gi}} = \frac{0,03}{10} \cdot \frac{0,0485}{3 \cdot 10^{-5}} = 4,85 \text{ s}$$

Para  $t = t_m = 30\text{s}$ , el valor de  $T_\infty = T(30\text{s}) = 626,1 \text{ K}$ :

$$\frac{t}{\tau} = 1,542 \quad ; \quad \frac{t}{\tau^*} = 6,180 \quad ; \quad \frac{\tau^*}{\tau} = 0,249$$

$$T^*(30\text{s}) = \left[ e^{-6,180} + \frac{1}{1 - 0,249} \cdot (e^{-1,542} - e^{-6,180}) \right] \cdot (270 - 626,1) + 626,1$$

$$T^*(30\text{s}) = 594,2 \text{ K}$$

Para  $t = t_m = 15\text{s}$ , el valor de  $T_\infty = T(15\text{s}) = 513,4\text{ K}$ :

$$\frac{t}{\tau} = 0,771 \quad ; \quad \frac{t}{\tau^*} = 3,093 \quad ; \quad \frac{\tau^*}{\tau} = 0,249$$

$$T^*(15\text{s}) = \left[ e^{-3,093} + \frac{1}{1 - 0,249} \cdot (e^{-0,771} - e^{-3,093}) \right] \cdot (270 - 513,4) + 513,4$$

$$T^*(15\text{s}) = 450,7\text{ K}$$

### Apartado 8

- a) Tomando como  $\tau^* = 18\text{s}$  y repitiendo los cálculos realizado en el apartado anterior, se verifica que  $T^*(30\text{s}) < 500\text{ K}$ .

Para  $t = t_m = 30\text{s}$ , el valor de  $T_\infty = T(30\text{s}) = 626,1\text{ K}$

$$\frac{t}{\tau} = 1,542 \quad ; \quad \frac{t}{\tau^*} = 1,667 \quad ; \quad \frac{\tau^*}{\tau} = 0,295$$

$$T^*(30\text{s}) = \left[ e^{-1,667} + \frac{1}{1 - 0,925} (e^{-1,542} - e^{-1,667}) \right] \cdot (270 - 626,1) + 626,1$$

$$T^*(30\text{s}) = 485,5\text{ K}$$

Queda confirmado que para el valor de  $\tau^* = 18\text{s}$ , se verifica que  $T^*(30\text{s}) < 500\text{ K}$ .

- b) Partiendo de la expresión dada en el apartado 7 para el tiempo característico  $\tau^*$  y la longitud característica interior  $L_{c.in}$ .

$$\tau^* = \frac{k_{gi}}{h_{in}} \cdot \frac{L_{c.in}}{\alpha_{gi}} \quad \text{y} \quad L_{c.in} = \frac{V_{in}}{A_{in}}$$

Reemplazando el valor de la difusividad térmica por  $\alpha_{gi} = k_{gi}/\rho_{gi} \cdot C_{p_{gi}}$ , y operando convenientemente se puede obtener que:

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{A_{in} \cdot h_{in}}{C_{p_{gi}} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}}$$

El término  $A_{in} \cdot h_{in}$  es la inversa de la resistencia térmica cuando no hay aislante ( $1/R$ ).

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1/R}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}}$$

De igual forma se puede definir una resistencia térmica equivalente ( $R_{eq}$ ) cuando existe un aislante interior y expresar la inversa del tiempo característico como:

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1/R_{eq}}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}}$$

Donde  $R_{eq}$  se puede calcular como:

$$R_{eq} = \frac{1}{A_{in} \cdot h_{in}} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k_{ais}}$$

Siendo,  $A_{in} = \pi \cdot D_1 \cdot L$  cuando existe aislante interior y el diámetro interior ( $D_1$ ), de acuerdo al enunciado, es  $D_1 = ((D - 2e) - 2e_{ais})$ .

- c) Para calcular el valor de debe tener la conductividad del aislante ( $k_{ais}$ ) para que el espesor de éste no sea mayor de 1 mm. Primero se puede despejar el valor de la resistencia térmica equivalente  $R_{eq}$  de la expresión del  $\tau^*$ , sabiendo que este debe ser igual a 18 s.

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1/R_{eq}}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{\tau^*}{Cp_{gi} \cdot \rho_{gi} \cdot V_{in}}$$

Siendo  $V_{in} = \pi \cdot D_1^2/4 \cdot L$  cuando existe aislante interior . Reemplazando valores.

$$R_{eq} = \frac{18}{1000 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 0,192^2/4 \cdot 3} = 0,2072 \text{ K/W}$$

Una vez obtenido el valor de  $R_{eq}$  se puede despejar la conductividad térmica del aislante de la expresión de  $R_{eq}$ .

$$k_{ais} = \frac{1}{R_{eq} - (1/(A_{in} \cdot h_{in}))} \cdot \frac{\ln(D_2/D_1)}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$k_{ais} = \frac{1}{0,2072 - (1/(\pi \cdot 0,192 \cdot 3 \cdot 10))} \cdot \frac{\ln(0,194/0,192)}{2 \cdot \pi \cdot 3}$$

$$k_{ais} = 0,0036 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

El valor obtenido es un valor extremadamente bajo para una conductividad térmica que solo lo cumplen aislantes denominados “super aislantes” y que son empleados con regularidad en la industria aeroespacial.

## 5.8 Satélite en el espacio

Un satélite geoestacionario tiene una masa equivalente  $m = 3500$  kg y un calor específico equivalente  $Cp = 500$  J/kg · K. En el transcurso de su órbita se expone alternativamente a la radiación solar con una potencia ( $RS$ ), o queda eclipsado ( $RS = 0$ ). El satélite genera calor con una potencia ( $P$ ) debido a sus equipos de a bordo, y emite calor por radiación hacia el espacio exterior con una potencia  $RE = \epsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{EE}^4)$ , siendo  $T$  la temperatura del satélite, que consideramos homogénea y variable en el tiempo, y  $T_{EE}$  la temperatura del espacio exterior que consideraremos despreciable frente a  $T$ .

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

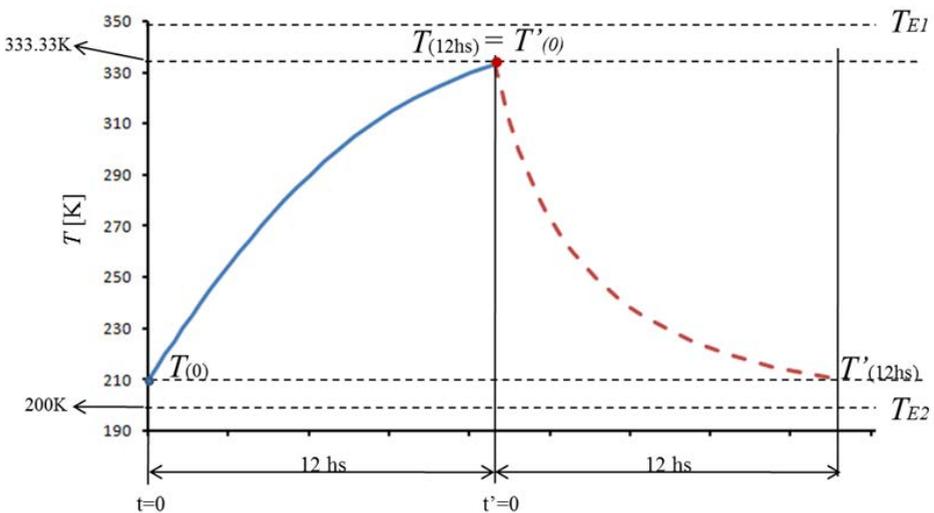
$A$ : es la superficie exterior efectiva del satélite ( $A_1$  cuando está expuesto y  $A_2$  cuando está eclipsado)

$\epsilon$ : es la emisividad efectiva del satélite ( $\epsilon_1$  cuando está expuesto y  $\epsilon_2$  cuando está eclipsado)

$\sigma$ : es la constante de Stefan-Boltzman =  $5,67 \cdot 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup> · K<sup>4</sup>

$T_{EE}$ : es la temperatura absoluta del espacio exterior  $\sim 0$

**Nota:** En la figura siguiente se representa esquemáticamente la evolución de la temperatura durante los procesos de calentamiento y enfriamiento que sufre el satélite durante un ciclo de 24 hs. Ésto es sólo a efectos didácticos, ya que un satélite de estas características, permanece no más de 15 minutos en sombra total y 1 hora en penumbra, el resto del tiempo está recibiendo radiación solar.



Se pide:

1. A partir del principio de conservación de la energía plantear las ecuaciones de los transitorios térmicos del satélite cuando está expuesto y cuando está eclipsado (las que denominaremos ec.1 y ec.2 respectivamente)
2. Obtener las ecuaciones para poder relacionar las temperaturas de equilibrio  $T_{E1}$  y  $T_{E2}$  de los transitorios térmicos anteriores con los parámetros del problema. Las temperaturas  $T_{E1}$  y  $T_{E2}$  son dos temperaturas características extremas que hay que compatibilizar con el rango de operación / funcionamiento de los equipos e instrumentos del satélite. El valor de diseño es en este caso:  $T_{E1} = 350$  K y  $T_{E2} = 200$  K
3. Comprobar que las ec.1 y ec.2 del apartado 1 se pueden escribir de forma adimensional como:

$$\text{ec.3} \quad \frac{d(T/T_{E1})}{d(t/\tau_1)} = \frac{1 - (T/T_{E1})^4}{4}$$

$$\text{ec.4} \quad \frac{d(T/T_{E2})}{d(t/\tau_2)} = \frac{1 - (T/T_{E2})^4}{4}$$

Siendo:  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dos tiempos característicos de los procesos no estacionarios descritos en las ec.1 y ec.2, y que vienen dados por:

$$\tau_1 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^3}$$

$$\tau_2 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^3}$$

Comprobar que el cociente adimensional  $t/\tau$  es proporcional al cociente  $Fo/Pl$ , siendo  $Fo$  el número de Fourier y  $Pl$  el número de Planck.

4. Teniendo en cuenta que la ec.3 puede integrarse y la solución de dicha integral es:

$$\frac{t}{\tau_1} + C_1 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + T/T_{E1}}{1 - T/T_{E1}} \right) + \arctg \left( \frac{T}{T_{E1}} \right) \right]$$

Obtener la constante de integración  $C_1$  si para el instante  $t = 0$  la temperatura del satélite es  $T(0) = 210$  K (5% más alta que  $T_{E2}$ ).

5. Determinar el valor del tiempo característico  $\tau_1$  para que 12 horas después del instante  $t = 0$  (tiempo que el satélite está expuesto a la radiación solar) la temperatura del mismo sea  $T(12\text{hs}) = 333,33 \text{ K}$  (5 % más baja que  $T_{E1}$ ).
6. Determinar el valor del producto  $\epsilon_1 \cdot A_1$  que deben tener las paredes del satélite durante el tiempo de exposición, para garantizar el valor de la temperatura  $T(12\text{hs})$  del apartado anterior.
7. Teniendo en cuenta que la ec.4 del apartado 3 puede integrarse y la solución de dicha integral es:

$$\frac{t}{\tau_2} + C_2 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{T/T_{E2} + 1}{T/T_{E2} - 1} \right) + \text{arctg} \left( \frac{T}{T_{E2}} \right) \right]$$

Obtener la constante de integración  $C_2$  si para el instante  $t' = 0$  la  $T'(0) = T(12\text{hs}) = 333,33 \text{ K}$ .

8. Determinar el valor del tiempo característico  $\tau_2$  para que 12 horas después del instante  $t' = 0$  (tiempo que el satélite está eclipsado) la temperatura del mismo sea  $T'(12\text{hs}) = 210 \text{ K}$ .
9. Determinar el valor del producto  $\epsilon_2 \cdot A_2$  que deben tener las paredes del satélite durante la etapa en que el satélite está eclipsado, para garantizar el valor de la temperatura  $T'(12\text{hs})$  del apartado 8.
10. Determinar la relación de potencias adimensional  $RS/P$  durante el tiempo de exposición para satisfacer las condiciones del problema.

## Apartado 1

Planteando la ecuación de la energía de forma genérica para el satélite se obtiene:

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = P + [RS - \epsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{EE}^4)]$$

Siendo el término de la izquierda el que caracteriza el transitorio térmico,  $P$  es el calor generado por el propio satélite y el término entre corchetes es la diferencia entre la radiación recibida, debida al sol, y la radiación que emite el satélite al espacio exterior.

Teniendo en cuenta que la temperatura del espacio exterior la podemos despreciar, se caracterizará la ecuación para los dos casos.

Para el caso que recibe radiación solar (ec.1):

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = P + RS - \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T^4$$

Para el caso que está eclipsado (ec.2):

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = P - \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

## Apartado 2

Las temperaturas de equilibrio se alcanzan cuando el transitorio térmico a finalizado, es decir cuando  $dT/dt = 0$ . Por tanto planteando las ecuaciones anteriores cuando este término es cero, podemos obtener:

Para el caso en el que recibe radiación solar:

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = P + RS - \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^4 = 0$$

$$T_{E1} = \left( \frac{P + RS}{\epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma} \right)^{1/4}$$

Para el caso en el que está eclipsado:

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = P - \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^4 = 0$$

$$T_{E2} = \left( \frac{P}{\epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma} \right)^{1/4}$$

## Apartado 3

Cuando el satélite está expuesto y alcanzamos la temperatura de equilibrio se puede escribir que:

$$P + RS = \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^4$$

Reemplazando en la ecuación obtenida en el apartado 1 (ec.1):

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^4 - \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T^4$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma}{Cp \cdot m} \cdot (T_{E1}^4 - T^4)$$

A partir de la definición dada en el enunciado para el tiempo característico  $\tau_1$ .

$$\tau_1 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^3}$$

Se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(T_{E1}^4 - T^4)}{4 \cdot \tau_1 \cdot T_{E1}^3}$$

Multiplicando y dividiendo por  $T_{E1}^4$  y operando convenientemente, se puede obtener la ecuación del enunciado (ec.3).

$$\frac{d(T/T_{E1})}{d(t/\tau_1)} = \frac{1 - (T/T_{E1})^4}{4}$$

Procediendo de la misma forma para el caso en el que el satélite está eclipsado.

$$P = \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^4$$

Reemplazando en la ecuación del apartado 1 (ec.2).

$$Cp \cdot m \cdot \frac{dT}{dt} = \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^4 - \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma}{Cp \cdot m} \cdot (T_{E2}^4 - T^4)$$

Usando la definición del tiempo característico  $\tau_2$  dada en el enunciado, se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(T_{E2}^4 - T^4)}{4 \cdot \tau_2 \cdot T_{E2}^3}$$

De igual forma que se realizó anteriormente, multiplicando y dividiendo por  $T_{E2}^4$  y operando convenientemente, se puede obtener la ecuación del enunciado (ec.4).

$$\frac{d(T/T_{E2})}{d(t/\tau_2)} = \frac{1 - (T/T_{E2})^4}{4}$$

#### Apartado 4

Partiendo de la solución de la ecuación diferencial dada en el enunciado se puede despejar la constante de integración  $C_1$ .

$$C_1 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + T/T_{E1}}{1 - T/T_{E1}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{T}{T_{E1}} \right) \right] - \frac{t}{\tau_1}$$

Resolviendo la siguiente ecuación para  $t = 0$ , teniendo en cuenta que para este instante  $T(0) = 210$  K y la temperatura de equilibrio  $T_{E1} = 350$  K.

$$C_1 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + 210/350}{1 - 210/350} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{210}{350} \right) \right] = 2,467$$

#### Apartado 5

Para  $t = 12$  hs (43200 s) la temperatura del satélite es  $T(12\text{hs}) = 333,33$  K.

Despejando el tiempo característico en la solución de la ecuación diferencial, y reemplazando valores, se obtiene:

$$\tau_1 = \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + T/T_{E1}}{1 - T/T_{E1}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{T}{T_{E1}} \right) \right] - C_1 \right\}^{-1} \cdot t$$

$$\tau_1 = \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + 333,33/350}{1 - 333,33/350} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{333,33}{350} \right) \right] - 2,467 \right\}^{-1} \cdot 43200$$

$$\tau_1 = 15604,7 \text{ s}$$

### Apartado 6

Partiendo de la definición del tiempo característico  $\tau_1$ , se puede despejar el valor necesario de  $\epsilon_1 \cdot A_1$  para cumplir con las condiciones del problema.

$$\tau_1 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^3} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 \cdot A_1 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \tau_1 \cdot \sigma \cdot T_{E1}^3}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\epsilon_1 \cdot A_1 = \frac{3500 \cdot 500}{4 \cdot 15604,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 350^3} = 11,53 \text{ m}^2$$

### Apartado 7

Partiendo de la solución de la ecuación diferencial dada en el enunciado se puede despejar la constante de integración  $C_2$ .

$$C_2 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{T/T_{E2} + 1}{T/T_{E2} - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{T}{T_{E2}} \right) \right] - \frac{t}{\tau_2}$$

Resolviendo la siguiente ecuación para  $t' = 0$ , teniendo en cuenta que para este instante  $T'(0) = 333,33 \text{ K}$  y la temperatura de equilibrio  $T_{E2} = 200 \text{ K}$ .

$$C_2 = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{333,33/200 + 1}{333,33/200 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{333,33}{200} \right) \right] = 3,447$$

### Apartado 8

Para  $t' = 12 \text{ hs}$  (43200 s) la temperatura del satélite es  $T(12\text{hs}) = 210 \text{ K}$ .

Despejando el tiempo característico en la solución de la ecuación diferencial, y reemplazando valores, se obtiene:

$$\tau_2 = \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{T/T_{E2} + 1}{T/T_{E2} - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{T}{T_{E2}} \right) \right] - C_2 \right\}^{-1} \cdot t$$

$$\tau_2 = \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{210/200 + 1}{210/200 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{210}{200} \right) \right] - 3,447 \right\}^{-1} \cdot 43200$$

$$\tau_2 = 22904,5 \text{ s}$$

### Apartado 9

Partiendo de la definición del tiempo característico  $\tau_2$ , se puede despejar el valor necesario de  $\epsilon_2 \cdot A_2$  para cumplir con las condiciones del problema.

$$\tau_2 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^3} \Rightarrow \epsilon_2 \cdot A_2 = \frac{m \cdot Cp}{4 \cdot \tau_2 \cdot \sigma \cdot T_{E2}^3}$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\epsilon_2 \cdot A_2 = \frac{3500 \cdot 500}{4 \cdot 22904,5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 200^3} = 42,11 \text{ m}^2$$

### Apartado 10

Partiendo de las expresiones obtenidas en el apartado 2 para las temperaturas de equilibrio y haciendo el cociente entre ellas, se puede obtener:

$$\left(\frac{T_{E1}}{T_{E2}}\right)^4 = \frac{\frac{P + RS}{\epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \sigma}}{\frac{P}{\epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \sigma}} = \frac{(P + RS) \cdot \epsilon_2 \cdot A_2}{P \cdot \epsilon_1 \cdot A_1}$$

$$\left(\frac{T_{E1}}{T_{E2}}\right)^4 \cdot \frac{\epsilon_1 \cdot A_1}{\epsilon_2 \cdot A_2} = \frac{RS + P}{P} = \frac{RS}{P} + 1$$

$$\frac{RS}{P} = \left(\frac{T_{E1}}{T_{E2}}\right)^4 \cdot \frac{\epsilon_1 \cdot A_1}{\epsilon_2 \cdot A_2} - 1$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\frac{RS}{P} = \left(\frac{350}{200}\right)^4 \cdot \frac{11,53}{42,11} - 1 = -1 = 1,568$$

## 5.9 Transitorio de un cuerpo sumergido en un recipiente

Un cuerpo de masa  $m_A$  y capacidad calorífica  $Cp_A$ , con una temperatura inicial  $T_{A0}$  se sumerge en el instante  $t = 0$  en un recipiente que contiene un fluido con una masa  $m_F$ , una capacidad calorífica  $Cp_F$  y una temperatura inicial  $T_{F0}$ , de tal forma que  $T_{F0} < T_{A0}$ . El recipiente está calorifugado, es decir, se supone adiabático, hacia el exterior.

El cuerpo intercambia calor con el fluido únicamente por convección, siendo el coeficiente de película  $h$  y la superficie de intercambio  $A$ .

A partir del instante  $t = 0$  el cuerpo sufre un enfriamiento y el fluido un calentamiento con un transitorio de temperatura, siendo  $T_A(t)$  y  $T_F(t)$  las temperaturas instantáneas del cuerpo y el fluido respectivamente.

### Primera Parte

Supondremos en esta primera parte, que tanto en el cuerpo como en el fluido la temperatura es uniforme.

Se pide:

1. Plantear la ecuación de la conservación de la energía para el sistema formado por el cuerpo y el fluido durante el transitorio, tanto para el flujo instantáneo de calor, como para el calor total intercambiado hasta un instante genérico  $t$ .
2. Determinar una expresión para la temperatura final de equilibrio,  $T_E$ , entre el cuerpo y el fluido.
3. Dibujar en forma esquemática la evolución de la temperatura  $T_A(t)$  y  $T_F(t)$  en función de  $t$ , indicando en el esquema el valor de  $T_E$ .
4. A partir de las ecuaciones planteadas en el apartado 1, demostrar que la temperatura instantánea del fluido  $T_F(t)$  se puede escribir en función de la temperatura instantánea del cuerpo  $T_A(t)$ , como:

$$T_F(t) = T_{F0} - M \cdot (T_A(t) - T_{A0})$$

Siendo  $M$  el cociente entre  $(m_A \cdot Cp_A)/(m_F \cdot Cp_F)$

5. A partir de los apartados 1 y 4 demostrar que la solución para el transitorio de temperatura del cuerpo es:

$$T_A(t) - T_{A0} = \frac{T_{A0} - T_{F0}}{1 + M} \cdot (e^{-t/\tau} - 1)$$

Siendo el tiempo característico  $\tau = (m_A \cdot Cp_A) / [h \cdot A \cdot (1 + M)]$

6. Comprobar que si  $M \rightarrow 0$  la expresión obtenida en el apartado 5 coincide con la obtenida con la siguiente expresión para la temperatura adimensional:

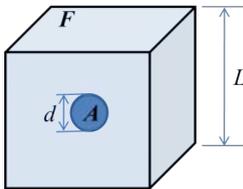
$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\left(\frac{h \cdot A}{\rho \cdot V \cdot Cp}\right) \cdot t}$$

Justificar físicamente qué implica  $M \rightarrow 0$ .

7. Determinar el valor de  $T_A(t)$  si  $M \rightarrow \infty$ . Justificar físicamente qué implica  $M \rightarrow \infty$ .

## Segunda Parte

Suponemos que el cuerpo es una esfera de aluminio de diámetro  $d = 10$  mm y el fluido es aire contenido en un recipiente cúbico. Las propiedades del aluminio y del aire, así como un esquema se presentan a continuación:



		Aluminio (A)	Aire (F)
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	2700	1,2
$Cp$	[J/kg · K]	900	1000
$k$	[W/m · K]	240	0,028
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]		$1,6 \cdot 10^{-5}$
Pr			0,69

8. Para unas condiciones iniciales  $T_{A0} = 80^\circ\text{C}$  y  $T_{F0} = 20^\circ\text{C}$ , siendo además  $M = 0,25$ , determinar el valor de  $T_E$ . Si queremos incrementar el valor de  $T_E$  ¿Cómo debe modificarse  $M$ ?
9. Determinar los valores de  $T_A(\tau)$  y de  $T_F(\tau)$ . ¿Para qué tiempo se puede suponer que el transitorio ha finalizado?
10. El aire en el recipiente se mantiene en movimiento con una velocidad efectiva de 80 m/s. Determinar el valor de número de Nusselt (Nu) y el valor del coeficiente de película  $h$ .

11. Calcular el tiempo característico  $\tau$  y el número de Biot de la esfera. Discutir la hipótesis de temperatura uniforme homogénea en la esfera durante el transitorio, aceptada hasta ahora. Nota:  $Bi = h \cdot V / (k_A \cdot A)$
12. Proponer algún estimador para decidir si la temperatura en el fluido es homogénea durante el transitorio. Justificar teóricamente la elección y obtener valores numéricos para el caso planteado en el problema. Dar una opinión basada en razonamientos cuantitativos o cualitativos acerca de la posibilidad de esta homogeneidad.
13. Un método para garantizar que la variación espacial de temperatura en el fluido sea pequeña, y por lo tanto, que se pueda suponer homogénea, es acercar el valor de  $T_E$  a  $T_{F0}$ . Determinar la capacidad del depósito de aire necesaria para que el nuevo valor de  $T_E^*$  difiera solo en un 10% de  $T_{F0}$ .
14. Determinar el nuevo valor del tiempo característico  $\tau^*$  con los resultados del apartado anterior y compararlo con el valor de  $\tau$ . Justificar físicamente el resultado.
15. Suponiendo que  $T_F = cte = T_{F0}$ , calcular los nuevos valores de  $\tau$  y  $T_A(3\tau)$  que denominaremos  $\tau^{**}$  y  $T_A(3\tau^{**})$ . Realizar la comparación con los resultados obtenidos en 13 y 14. Discutir que error se comete al hacer esta suposición.

## Apartado 1

Teniendo en cuenta que el calor intercambiado con el exterior es nulo (recipiente adiabático), el único intercambio de calor se produce entre el cuerpo y el fluido, siendo el calor cedido por el cuerpo el que absorbe el fluido. Por tanto el balance de energía se puede plantear de la siguiente forma:

$$q(t) = q_A(t) = q_F(t)$$

El signo menos tiene en cuenta que el cuerpo se enfría y el fluido se calienta.

$$q(t) = -m_A \cdot C_{pA} \cdot \frac{dT_A(t)}{dt} = m_F \cdot C_{pF} \cdot \frac{dT_F(t)}{dt}$$

Teniendo en cuenta que el calor cedido por el cuerpo se transfiere al fluido por convección la ecuación anterior puede expresarse como:

$$q(t) = -m_A \cdot C_{pA} \cdot \frac{dT_A(t)}{dt} = h \cdot A \cdot [T_A(t) - T_F(t)]$$

Para un instante  $t$  cualquiera el calor total intercambiado se puede determinar como:

$$q(t) = -m_A \cdot C_{pA} \cdot [T_A(t) - T_{A0}] = m_F \cdot C_{pF} \cdot [T_F(t) - T_{F0}]$$

## Apartado 2

La temperatura de equilibrio se alcanzará en el instante  $t$  en el que la temperatura del cuerpo y el fluido son iguales, es decir:

$$T_E = T_A(t) = T_F(t)$$

Por tanto la ecuación obtenida en el apartado anterior queda como:

$$-m_A \cdot C_{pA} \cdot [T_E - T_{A0}] = m_F \cdot C_{pF} \cdot [T_E - T_{F0}]$$

$$\frac{m_A \cdot C_{pA}}{m_F \cdot C_{pF}} \cdot [T_{A0} - T_E] = [T_E - T_{F0}]$$

Si se define  $M$  como el cociente  $(m_A \cdot C_{pA})/(m_F \cdot C_{pF})$ .

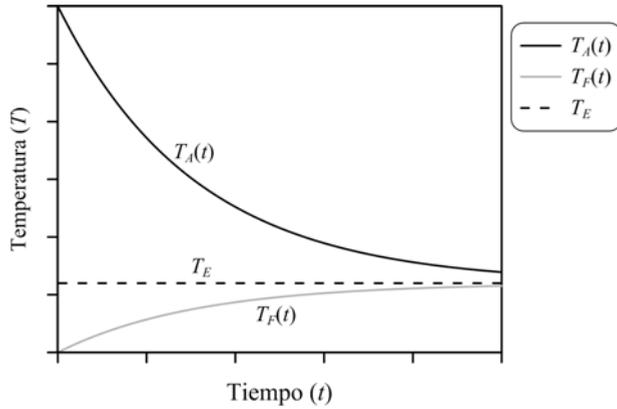
$$M \cdot [T_{A0} - T_E] = [T_E - T_{F0}]$$

Finalmente se despeja  $T_E$ , obteniendo:

$$T_E = \frac{M \cdot T_{A0} + T_{F0}}{1 + M}$$

## Apartado 3

La evolución de las temperaturas del cuerpo  $T_A(t)$  y del fluido  $T_F(t)$  deben ser asintóticas a la temperatura de equilibrio  $T_E$ . En la figura 5.9.1 se indica de forma esquemática la variación de las temperaturas del cuerpo y el fluido durante el transitorio térmico.



**Figura 5.9.1:** Representación esquemática de la variación de temperaturas del cuerpo y el fluido

#### Apartado 4

De la ecuación obtenida en el apartado 1, se puede despejar la temperatura del fluido en función de la temperatura del cuerpo y obtener:

$$q = -m_A \cdot C p_A \cdot [T_A(t) - T_{A0}] = m_F \cdot C p_F \cdot [T_F(t) - T_{F0}]$$

$$-\frac{m_A \cdot C p_A}{m_F \cdot C p_F} \cdot [T_A(t) - T_{A0}] = [T_F(t) - T_{F0}]$$

$$T_F(t) = T_{F0} - M \cdot [T_A(t) - T_{A0}]$$

#### Apartado 5

Sustituyendo la ecuación obtenida en el apartado 4 en la ecuación para el calor instantáneo obtenido en el apartado 1, se obtiene:

$$-m_A \cdot C p_A \cdot dT_A(t)/dt = h \cdot A \cdot [T_A(t) - T_{F0} + M \cdot (T_A(t) - T_{A0})]$$

$$-\frac{m_A \cdot C p_A}{h \cdot A} \cdot \frac{dT_A(t)}{dt} = [T_A(t) \cdot (1 + M) - T_{F0} - M \cdot T_{A0}]$$

Definiendo:

$$a = (1 + M) \quad ; \quad b = -T_{F0} - M \cdot T_{A0} \quad ; \quad c = \frac{m_A \cdot Cp_A}{h \cdot A}$$

La expresión anterior queda como:

$$-c \cdot \frac{dT_A(t)}{dt} = a \cdot T_A(t) + b$$

$$-c \cdot \frac{dT_A(t)}{a \cdot T_A(t) + b} = dt$$

Integrando la ecuación anterior:

$$-c \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln(a \cdot T_A(t) + b) = t + cte$$

Si se aplica la condición inicial:  $T_A = T_{A0}$  para  $t = 0$ :

$$cte = -\frac{c}{a} \cdot \ln(a \cdot T_{A0} + b)$$

Sustituyendo el valor de la constante en la ecuación integrada:

$$-c \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln(a \cdot T_A(t) + b) = t - \frac{c}{a} \cdot \ln(a \cdot T_{A0} + b)$$

Operando se llega a:

$$\frac{a \cdot T_A(t) + b}{a \cdot T_{A0} + b} = e^{-(a \cdot t/c)}$$

Sustituyendo los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  se obtiene:

$$\frac{T_A(t) - T_{A0}}{T_{A0} - T_{F0}} = \frac{1}{1 + M} \cdot (e^{-(t/\tau)} - 1)$$

Siendo  $\tau = (m_A \cdot Cp_A)/(h \cdot A \cdot (1 + M))$

### Apartado 6

Suponer que  $M \rightarrow 0$  es asumir que la capacidad térmica del fluido del depósito es infinita, por tanto la  $T_F(t) = cte = T_{F0}$ .

$$\tau = \frac{1}{(1+M)} \cdot \frac{m_A \cdot Cp_A}{h \cdot A} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_A \cdot Cp_A}{h \cdot A}$$

Reemplazando el valor de  $M$  en la ecuación obtenida en el apartado anterior.

$$\frac{T_A(t) - T_{A0}}{T_{A0} - T_{F0}} = \frac{1}{1+0} \cdot (e^{-(t/\tau)} - 1)$$

$$T_A(t) - T_{A0} = (T_{A0} - T_{F0}) \cdot e^{-(t/\tau)} - (T_{A0} - T_{F0})$$

$$\frac{T_A(t) - T_{F0}}{T_{A0} - T_{F0}} = e^{-(t/\tau)}$$

### Apartado 7

Suponer que  $M \rightarrow \infty$  es asumir que la capacidad térmica del cuerpo es infinita, por tanto la  $T_A(t) = cte = T_{A0}$ .

$$\frac{T_A(t) - T_{F0}}{T_{A0} - T_{F0}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A(t) = T_{F0}$$

### Apartado 8

Reemplazando valores en la ecuación obtenida en el apartado 2.

$$T_E = \frac{M \cdot T_{A0} + T_{F0}}{1 + M} = \frac{0,25 \cdot 80 + 20}{1 + 0,25} = 32^\circ\text{C}$$

Si se quiere incrementar el valor de la temperatura de equilibrio, lo que se debe hacer es incrementar el valor de  $M$ , o lo que es lo mismo, incrementar la capacidad térmica de la esfera. Esto se puede hacer o incrementando su masa o haciéndola de un material con un calor específico más grande. El límite para la temperatura de equilibrio será siempre la temperatura inicial del cuerpo  $T_{A0}$ .

## Apartado 9

Reemplazando valores en la ecuación obtenida el apartado 5, para  $t = \tau$ , se puede calcular el valor de  $T_A(\tau)$ :

$$T_A(\tau) = T_{A0} + \frac{T_{A0} - T_{F0}}{1 + M} \cdot (e^{-(t/\tau)} - 1)$$

$$T_A(\tau) = 80 + \frac{80 - 20}{1 + 0,25} \cdot (e^{-1} - 1) = 49,66^\circ\text{C}$$

Reemplazando valores en la ecuación que describe la evolución de la temperatura del fluido, se puede calcular el valor de  $T_F(\tau)$ :

$$T_F(\tau) = -M \cdot (T_A(t) - T_{A0}) + T_{F0}$$

$$T_F(\tau) = -0,25 \cdot (49,66 - 80) + 20 = 27,59^\circ\text{C}$$

Un criterio razonable para asumir que el transitorio térmico ha finalizado es cuando la diferencia entre la temperatura de la esfera y el fluido, respecto a la temperatura de equilibrio, tienen un valor en torno al 5% del valor inicial.

Para la esfera:  $\Delta T_A = T_{A0} - T_E = 48^\circ\text{C} \rightarrow 5\% \Delta T_A = 2,4^\circ\text{C}$ .

Para la esfera:  $\Delta T_F = T_{F0} - T_E = 12^\circ\text{C} \rightarrow 5\% \Delta T_B = 0,6^\circ\text{C}$ .

Por lo tanto se puede considerar que el transitorio ha finalizado cuando  $T_A(t) = 34,4^\circ\text{C}$  y  $T_F(t) = 31,4^\circ\text{C}$ .

Estos valores de temperatura se alcanzan cuando  $t = 3\tau$ .

$$T_A(3\tau) = 80 + \frac{80 - 20}{1 + 0,25} \cdot (e^{-3} - 1) = 34,39^\circ\text{C}$$

$$T_F(3\tau) = -0,25 \cdot (34,39 - 80) + 20 = 31,40^\circ\text{C}$$

## Apartado 10

La correlación propuesta por Whitaker, para flujo externo sobre una esfera, es adecuada para hallar el número de Nusselt. Se asume que el cociente de viscosidades es igual a 1, dado que la viscosidad del aire, en el intervalo de temperaturas del problema, no varía de forma muy acusada.

$$\text{Nu} = 2 + \left[ 0,4 \cdot \text{Re}^{1/2} + 0,06 \cdot \text{Re}^{2/3} \right] \cdot \text{Pr}^{0,4} \cdot \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{1/4}$$

El número de Reynolds para este problema se calcula como:

$$\text{Re} = \frac{u \cdot d}{\nu_F} = \frac{80 \cdot 0,01}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 50000$$

Reemplazando valores en la correlación de Whitaker:

$$\text{Nu} = 2 + \left[ 0,4 \cdot 50000^{1/2} + 0,06 \cdot 50000^{2/3} \right] \cdot 0,69^{0,4} \cdot (1)^{1/4} = 149,31$$

A partir de la definición del número de Nusselt se puede hallar el valor de  $h$ .

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot d}{k_F} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\text{Nu} \cdot k_F}{d}$$

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k_F}{d} = \frac{150,16 \cdot 0,028}{0,01} = 418,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

## Apartado 11

Primero se calcula la el área transversal, el volumen, y la masa de la esfera.

$$A = \pi \cdot d^2 = \pi \cdot 0,01^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V_A = \pi \cdot d^3/6 = \pi \cdot 0,01^3/6 = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

$$m_A = V_A \cdot \rho_A = 5,2 \cdot 10^{-7} \cdot 2700 = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Ahora el número de Biot se puede calcular como:

$$\text{Bi} = \frac{h}{k_A} \cdot \frac{V_A}{A} = \frac{418,1}{240} \cdot \frac{5,2 \cdot 10^{-7}}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 0,0029$$

Teniendo en cuenta que el número de Biot es menor de 0,1 la hipótesis de temperatura homogénea en el cuerpo puede considerarse como válida.

Reemplazando los valores obtenidos también se puede calcular el valor de  $\tau$ .

$$\tau = \frac{1}{(1 + M)} \cdot \frac{m_A \cdot C_{pA}}{h \cdot A} = \frac{1}{(1 + 0,25)} \cdot \frac{1,41 \cdot 10^{-3} \cdot 900}{418,1 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 7,75 \text{ s}$$

## Apartado 12

Un estimador puede ser el número de Peclet, si este número es lo suficientemente grande indica que la convección es predominante a la difusión térmica en el fluido, por lo tanto, habrá un importante gradiente local de temperatura (zona de contacto entre la esfera y el fluido), pero luego la temperatura en el resto del fluido permanecerá prácticamente constante.

El número de Peclet se define como:

$$\text{Pe} = \frac{u \cdot L}{\alpha}$$

Donde:  $u$  es la velocidad del fluido,  $L$  es la longitud característica, en este caso el lado del cubo y  $\alpha$  es la difusividad térmica ( $k/\rho \cdot Cp$ ).

Para calcular el lado del cubo, se puede calcular la masa de fluido a partir del  $M$  y con este valor estimar el volumen necesario para contenerlo.

$$M = \frac{m_A \cdot C_{pA}}{m_F \cdot C_{pF}} \quad \Rightarrow \quad m_F = \frac{1}{M} \cdot \frac{m_A \cdot C_{pA}}{C_{pF}}$$

$$m_F = \frac{1}{0,25} \cdot \frac{1,41 \cdot 10^{-3} \cdot 900}{1000} = 5,04 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Con este valor de masa de aire se puede calcular el volumen necesario para contenerla.

$$V_F = \frac{m_F}{\rho_F} = \frac{5,04 \cdot 10^{-3}}{1,2} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Teniendo en cuenta la geometría del problema se puede calcular el lado del cubo de la siguiente manera:

$$V_F = L^3 - \pi \cdot \frac{d^3}{6} \Rightarrow L = \sqrt[3]{V_F + \left(\pi \cdot \frac{d^3}{6}\right)}$$

$$L = \sqrt[3]{4,2 \cdot 10^{-3} + \left(\pi \cdot \frac{0,01^3}{6}\right)} = 0,162 \text{ m}$$

Con este valor de la longitud característica se puede calcular el número de Peclet:

$$\text{Pe} = \frac{u \cdot L}{\alpha_F} = u \cdot L \cdot \frac{\rho_F \cdot C_{pF}}{k_F}$$

$$\text{Pe} = 80 \cdot 0,162 \cdot \frac{1,2 \cdot 1000}{0,028} = 5,55 \cdot 10^{-5}$$

Teniendo en cuenta que el número de Peclet es lo suficientemente alto se puede considerar que la temperatura del fluido es homogénea, aunque existan gradientes locales de temperatura elevados.

### Apartado 13

La temperatura de equilibrio en este apartado se impone en un 10% más que la temperatura inicial del fluido, es decir  $T_E^* = 22^\circ\text{C}$ .

De la ecuación del apartado 2 se puede despejar el nuevo valor de  $M^*$  para la  $T_E^*$ .

$$T_E = \frac{M^* \cdot T_{A0} + T_{F0}}{1 + M^*} \Rightarrow M^* = \frac{T_{F0} - T_E^*}{T_E^* - T_{A0}}$$

$$M^* = \frac{20 - 22}{22 - 80} = 0,0345$$

A partir de la definición de  $M^*$  se puede calcular la masa de aire  $m_{F^*}$  necesaria para cumplir esta condición.

$$M^* = \frac{m_A \cdot C_{pA}}{m_{F^*} \cdot C_{pF}} \Rightarrow m_{F^*} = \frac{1}{M^*} \cdot \frac{m_A \cdot C_{pA}}{C_{pF}}$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$m_F^* = \frac{1}{0,0345} \cdot \frac{1,41 \cdot 10^{-3} \cdot 900}{1000} = 3,69 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$V_F^* = \frac{m_F^*}{\rho_F} = \frac{3,69 \cdot 10^{-2}}{1,2} = 3,07 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

Teniendo en cuenta la geometría de la misma forma que en el apartado anterior, se obtiene:

$$V_F^* = L^{*3} - \pi \cdot \frac{d^3}{6} \Rightarrow L^* = \sqrt[3]{V_F^* + \left(\pi \cdot \frac{d^3}{6}\right)}$$

$$L^* = 0,313 \text{ m}$$

#### Apartado 14

Reemplazando los valores obtenidos en el apartado 13 se puede calcular el valor de  $\tau^*$ .

$$\tau^* = \frac{1}{(1 + M^*)} \cdot \frac{m_A \cdot Cp_A}{h \cdot A} = \frac{1}{(1 + 0,0345)} \cdot \frac{1,41 \cdot 10^{-3} \cdot 900}{418,1 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 9,36 \text{ s}$$

$$T_A(3\tau^*) = 80 + \frac{80 - 20}{1 + 0,0345} \cdot (e^{-3} - 1) = 24,89^\circ\text{C}$$

El valor de  $\tau^*$  es mayor que el de  $\tau$ , dado que la temperatura de equilibrio es más baja y por tanto el tiempo en el que se alcanza el equilibrio es más grande.

#### Apartado 15

Si ahora la temperatura del fluido es constante  $T_F = cte = T_{F0}$ , la nueva temperatura de equilibrio es  $T_E^{**} = T_{F0} = 20^\circ\text{C}$ . Asumir que  $T_F = cte$  implica que la capacidad térmica del fluido es infinita y por tanto  $M^{**} = 0$ .

El valor de  $\tau^{**}$  se puede calcular como:

$$\tau^{**} = \frac{1}{(1 + M^{**})} \cdot \frac{m_A \cdot Cp_A}{h \cdot A} = \frac{1}{(1 + 0)} \cdot \frac{1,41 \cdot 10^{-3} \cdot 900}{418,1 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 9,69 \text{ s}$$

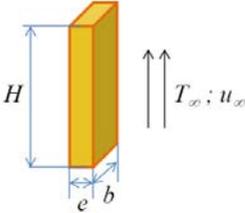
La temperatura de del fluido para  $3\tau^{**}$  es:

$$T_A(3\tau^{**}) = 80 + \frac{80 - 20}{1 + 0} \cdot (e^{-3} - 1) = 22,99^\circ\text{C}$$

El tiempo característico es prácticamente igual (3 % de diferencia), pero las temperaturas difieren en torno al 10 %.

## 5.10 Placa de titanio

Un prisma rectangular de titanio (como el de la figura) se retira de un horno, estando todo el material de la pieza a una temperatura  $T_i = 180^\circ\text{C}$ . La pieza se introduce en  $t = 0$  en una corriente de aire longitudinal con una velocidad  $u_\infty = 0,2 \text{ m/s}$  y una temperatura  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ .



Las dimensiones de la placa son:

$$H = 0,25 \text{ m}$$

$$e = 0,025 \text{ m}$$

$$b = 0,1 \text{ m}$$

Las propiedades del aire y del titanio se pueden considerar constantes y son:

Datos del Aire:

$$k_{ai} = 0,03 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\nu_{ai} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\beta = 2,68 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Pr} = 0,711$$

Datos del titanio:

$$k_{ti} = 22 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{ti} = 4500 \text{ kg/m}^3$$

$$Cp_{ti} = 522 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\alpha_{ti} = 9,32 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Se pide:

1. Verificar si el intercambio de calor por convección entre el aire y la pieza se puede considerar como convección natural (libre), convección forzada o hay que analizarla como un efecto combinada de ambas.
2. En función de la respuesta del apartado 1, elegir la correlación adecuada para el cálculo del número de Nusselt y calcular el coeficiente de película  $h$  entre el aire y la pieza.
3. Verificar que se puede aplicar, durante el transitorio térmico, el método de la resistencia térmica despreciable y plantear la ecuación diferencial que controla el proceso.
4. Asumiendo que la respuesta del apartado 3 es afirmativa, calcular el tiempo característico del problema y calcular el tiempo cuando ha transcurrido aproximadamente el 95 % de transitorio térmico. Calcular el tiempo que se tarda en alcanzar en el centro de la pieza la temperatura de  $100^\circ\text{C}$  y el valor del número de Fourier en este instante.
5. Para disminuir el tiempo de enfriamiento se aumenta la velocidad del aire de forma tal que el coeficiente de película  $h$ , se incrementa 5 veces con respecto

al valor original. Con el nuevo valor de coeficiente de película  $h'$  y aplicando el modelo dimensional para una placa plana infinita, calcular el tiempo que se tarda en alcanzar  $100^{\circ}\text{C}$  en el centro de la pieza de titanio y comparar con el resultado obtenido en el apartado 4.

6. Calcular la cantidad de calor que se ha transferido cuando se alcanza la temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$  en el centro de la pieza.
7. Teniendo en cuenta las dimensiones de la pieza, se puede considerar que la hipótesis de placa plana infinita no es del todo correcta, por tanto se propone utilizar el método 3D para resolver el problema. Utilizando este método calcular que temperatura alcanza el centro de la pieza en el instante calculado en el apartado 5 y comparar los resultados.

### Apartado 1

Teniendo en cuenta que existe una corriente de aire es correcto pensar que hay un efecto combinado entre convección natural y libre, sin embargo es necesario calcular los números adimensionales de Reynolds y Grashof para poder determinar cuál de los dos mecanismos es el predominante, o si por el contrario, es necesario considerar el efecto combinado de ambos.

Para el cálculo de los números adimensionales, en este apartado, utilizaremos como longitud característica la longitud  $H$  de la placa.

$$\text{Re} = \frac{u_{\infty} \cdot H}{\nu_{ai}} = \frac{0,2 \cdot 0,25}{2,3 \cdot 10^{-5}} = 2173,9$$

Para el cálculo del número de Grashof, se utilizará como temperatura de pared, la temperatura inicial.

$$\text{Gr} = \frac{\beta \cdot g \cdot H^3 \cdot (T_p - T_{\infty})}{\nu_{ai}^2} = \frac{2,68 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 0,25^3 \cdot (180 - 20)}{(2,3 \cdot 10^{-5})^2}$$

$$\text{Gr} = 124120983 = 1,241 \cdot 10^8$$

Para cuantificar cuál es el mecanismo predominante se debe calcular el cociente entre el número de Grashof y el número de Reynolds al cuadrado.

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} = \frac{1,241 \cdot 10^8}{2173,9^2} = 26,26$$

Teniendo en cuenta que el resultado es mucho mayor que 1, se puede considerar que el mecanismo predominante en estas condiciones del problema es la convección natural.

Es de destacar que en la medida que el transitorio térmico avance y la placa se enfríe se producirá una reducción en el número de Grashof, por tanto el cociente calculado anteriormente disminuirá su valor, y por tanto la convección forzada tendrá más relevancia al final del transitorio térmico.

## Apartado 2

Una correlación adecuada para este problema puede ser la propuesta por Churchill y Chu para placas y cilindros verticales en procesos de convección natural.

$$\text{Nu} = \left\{ a + b \cdot \text{Ra}^m \cdot \left[ 1 + \left( \frac{0,492}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right]^n \right\}^k$$

Los valores de los exponentes y las constantes de la ecuación varían en función del número de Rayleigh. Para este problema el valor de Ra es:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = 1,241 \cdot 10^8 \cdot 0,711$$

$$\text{Ra} = 8,825 \cdot 10^7 < 10^9$$

Un número de Rayleigh menor de  $10^9$  indica que en el proceso aún no han surgido inestabilidades hidrodinámicas que generan un proceso de convección natural turbulento. Para un número de Rayleigh menor que  $10^9$  las constantes toman los siguientes valores:

$$a = 0,68 \quad ; \quad b = 0,67 \quad ; \quad m = 0,25 \quad ; \quad n = -0,44 \quad ; \quad k = 1$$

Reemplazando valores en la correlación de Churchill y Chu, se obtiene:

$$\text{Nu} = \left\{ 0,68 + 0,67 \cdot (8,825 \cdot 10^7)^{0,25} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{0,492}{0,711} \right)^{9/16} \right]^{-0,44} \right\}^1$$

$$\text{Nu} = 50,66$$

A partir de la definición del número de Nusselt y utilizando como longitud característica  $H$ , se calcula el coeficiente de película.

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot K}{k_{ai}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\text{Nu} \cdot k_{ai}}{H}$$

$$h = \frac{50,66 \cdot 0,03}{0,25} = 6,08 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

### Apartado 3

Para verificar si es posible aplicar el método de la resistencia interna despreciable, es decir, considerar que la distribución de temperatura dentro de la pieza es homogénea, hay que calcular el número de Biot y comprobar que su valor es menor que 0,1.

La longitud característica a considerar en este caso es la relación volumen / área, siendo ésta igual al espesor  $e$ .

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot e}{k_{ti}} = \frac{6,08 \cdot 0,025}{22} = 0,0069 < 0,1$$

Con el valor del número de Biot obtenido se puede considerar que el método se puede aplicar y la ecuación diferencial que controla el proceso se puede escribir como:

$$\frac{dq}{dt} = -\rho \cdot V \cdot C_p \cdot \frac{dT(t)}{dt} = h \cdot A \cdot (T(t) - T_\infty)$$

### Apartado 4

La solución de la ecuación diferencial del apartado anterior, se puede escribir de forma adimensional como:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta(t) = e^{-(t/\tau)}$$

Donde  $\tau$  es el tiempo característico del problema y se puede calcular como:

$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p}{h} \cdot \frac{V}{A} = \frac{\rho \cdot C_p}{h} \cdot e$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$\tau = \frac{4500 \cdot 522}{6,08} \cdot 0,025 = 9659,6 \text{ s}$$

El 95 % del transitorio térmico ha transcurrido cuando el valor de la temperatura adimensional alcanza el valor de 0,05, de forma aproximada esto ocurre cuando el cociente  $t/\tau$  es igual a 3. De esta forma se puede concluir que el 95 % del transitorio ocurre para un tiempo  $t$  igual a  $3\tau$ .

$$t_{95\%} = 3 \cdot \tau = 3 \cdot 9659,6$$

$$t_{95\%} = 28978,7 \text{ s} = 8\text{hs } 2\text{m } 58,7\text{s}$$

Para hallar el tiempo para que la pieza alcance los 100°C es necesario calcular la temperatura adimensional, y despejar el tiempo de la ecuación del campo de temperatura.

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{100 - 20}{180 - 20} = 0,5$$

$$\ln \theta(t) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad t = -\tau \cdot \ln \theta(t)$$

$$t = -9659,6 \cdot \ln 0,5 = 6695,5 \text{ s} = 1\text{hs } 51\text{m } 35,5\text{s}$$

Para este instante del transitorio el número de Fourier es:

$$Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{e^2} = \frac{9,32 \cdot 10^{-6} \cdot 6695,5}{0,025^2} = 99,8$$

## Apartado 5

De acuerdo con los datos del enunciado el nuevo valor del coeficiente de película  $h'$  es 5 veces el valor original, por tanto  $h' = 30,4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Por tanto para la resolución de este apartado se usara  $h'$  con su valor correspondiente.

La solución aproximada cuando  $Fo > 0,2$  para un problema de transferencia de calor no estacionario unidimensional considerando una placa infinita es:

$$\theta(t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \theta_0(t) \cdot \cosh(\xi_1 \cdot x^*)$$

Donde  $\theta_0$  es la temperatura adimensional en el centro de la placa.

$$\theta_0(t) = \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$$

Las constantes  $C_1$  y  $\xi_1$  son coeficientes tabulados en función del número de Biot.

Siendo:

$$x^* = \frac{x}{(e/2)} \quad ; \quad Bi = \frac{h' \cdot (e/2)}{k_{ti}} \quad ; \quad Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{(e/2)^2}$$

Es importante destacar que la elección de la longitud característica de los números adimensionales (Bi y Fo) ha cambiado respecto a las utilizadas en los apartados anteriores. Para utilizar el método dimensional considerando una placa infinita de espesor  $e$  la longitud característica es la mitad del espesor ( $e/2$ ).

El primer paso para la resolución del apartado es calcular el número de Biot y obtener los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\xi_1$ .

$$Bi = \frac{h' \cdot (e/2)}{k_{ti}} = \frac{30,4 \cdot (0,025/2)}{22} = 0,0173$$

Con  $Bi = 0,0173$ , los valores de los coeficientes (obtenidos de las tablas del anexo) son:

$$C_1 = 1,0028 \quad y \quad \xi_1 = 0,129$$

La temperatura adimensional cuando el centro de la pieza alcanza los  $100^{\circ}\text{C}$  es  $0,5$  como se calculó en el apartado anterior. Reemplazando estos valores en la ecuación correspondiente se puede despejar el número de Fourier y obtener el tiempo necesario para alcanzar esta temperatura.

$$\theta_0(t) = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \quad \Rightarrow \quad Fo = -\frac{1}{\xi_1^2} \cdot \ln\left(\frac{\theta_0(t)}{C_1}\right)$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$Fo = -\frac{1}{0,129^2} \cdot \ln\left(\frac{0,5}{1,0028}\right) = 41,82$$

A partir del Fourier se obtiene el tiempo que se necesita para alcanzar 100°C en el centro de la pieza.

$$Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{(e/2)^2} \Rightarrow t = \frac{Fo \cdot (e/2)^2}{\alpha_{ti}}$$

$$t = \frac{41,82 \cdot (0,025/2)^2}{9,32 \cdot 10^{-6}} = 701,1 \text{ s} = 11\text{m } 41,1\text{s}$$

Como se puede ver, con un incremento en el valor del coeficiente de película moderado, la reducción en el tiempo de enfriamiento es considerable, de casi dos horas a poco menos de 12 minutos.

## Apartado 6

La cantidad de calor intercambiado hasta el instante cuando la pieza alcanza en su centro la temperatura de 100°C referida a la cantidad máxima de calor que podría intercambiar la pieza, se puede calcular como:

$$\frac{q}{q_{max}} = 1 - \frac{\text{sen}(\xi_1)}{\xi_1} \cdot \theta_0$$

$$\frac{q}{q_{max}} = 1 - \frac{\text{sen}(0,129)}{0,129} \cdot 0,5 = 0,5014$$

La cantidad de calor máxima que puede intercambiar la pieza se calcula como:

$$q_{max} = \rho \cdot V \cdot Cp \cdot (T_i - T_\infty) = 4500 \cdot 6,25 \cdot 10^{-4} \cdot 522 \cdot (180 - 20)$$

$$q_{max} = 234900 \text{ J} = 234,90 \text{ kJ}$$

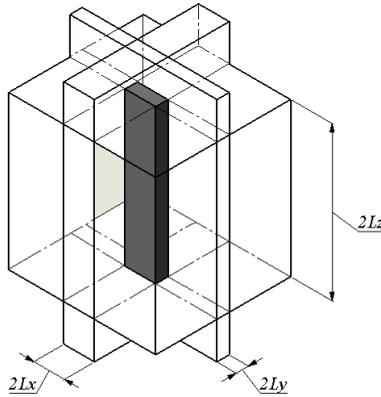
Por tanto la cantidad de calor intercambiada hasta el instante considerado es:

$$q = q_{max} \cdot 0,5014 = 234,90 \cdot 0,5014 = 117,78 \text{ kJ}$$

## Apartado 7

Si se considera la placa como un sólido, intersección de tres placas planas infinitas ortogonales entre sí (ver figura 5.10.1 y de espesores  $2L_x = 0,1$ ,  $2L_y = 0,025$  y  $2L_z = 0,25$ , el campo tridimensional de temperaturas se obtiene como el producto de los campos de temperatura de estas tres placas infinitas.

$$\begin{aligned} \left( \frac{T(x, y, z, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{3D} &= \\ &= \left( \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_x} \cdot \left( \frac{T(y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_y} \cdot \left( \frac{T(z, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_z} \end{aligned}$$



**Figura 5.10.1:** Representación esquemática de la intersección de tres placas de dimensiones  $2L_x$ ,  $2L_y$  y  $2L_z$ .

Hay que tener en cuenta que la longitud característica tanto para el número de Biot como para el de Fourier se define de forma individual para cada placa infinita.

Los cálculos se realizarán para las tres placas considerando el instante obtenido en el apartado 5, es decir cuando la placa infinita individual alcanza la temperatura de  $100^\circ\text{C}$  en su centro.

Placa de espesor  $2L_x = 0,1$ , temperatura en el centro  $x = 0$ .

$$Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{L_x^2} = \frac{9,32 \cdot 10^{-6} \cdot 701,1}{0,05^2} = 2,61$$

$$Bi = \frac{h' \cdot L_x}{k_{ti}} = \frac{30,4 \cdot 0,05}{22} = 0,069$$

Para este Biot las constantes son:  $C_1 = 1,011$  y  $\xi_1 = 0,2571$

$$\theta_0(t) = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} = 1,011 \cdot e^{-(0,2571^2 \cdot 2,61)} = 0,8506$$

Placa de espesor  $2L_y = 0,025$ , temperatura en el centro  $y = 0$ .

$$Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{L_y^2} = \frac{9,32 \cdot 10^{-6} \cdot 701,1}{0,0125^2} = 41,82$$

$$Bi = \frac{h' \cdot L_y}{k_{ti}} = \frac{30,4 \cdot 0,0125}{22} = 0,0173$$

Para este Biot las constantes son:  $C_1 = 1,0028$  y  $\xi_1 = 0,129$

$$\theta_0(t) = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} = 1,0028 \cdot e^{-(0,129^2 \cdot 41,82)} = 0,5$$

Placa de espesor  $2L_z = 0,25$ , temperatura en el centro  $z = 0$ .

$$Fo = \frac{\alpha_{ti} \cdot t}{L_z^2} = \frac{9,32 \cdot 10^{-6} \cdot 701,1}{0,125^2} = 0,42$$

$$Bi = \frac{h' \cdot L_z}{k_{ti}} = \frac{30,4 \cdot 0,125}{22} = 0,1727$$

Para este Biot las constantes son:  $C_1 = 1,027$  y  $\xi_1 = 0,3963$

$$\theta_0(t) = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} = 1,027 \cdot e^{-(0,3963^2 \cdot 0,42)} = 0,9617$$

Reemplazando valores en la ecuación del campo de temperaturas tridimensional se obtiene:

$$\theta(0, 0, 0, t) = \left( \frac{T(0, 0, 0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{3D} = 0,8506 \cdot 0,5 \cdot 0,9617 = 0,409$$

Despejando el valor de  $T(0, 0, 0, t)$  se obtiene la temperatura en el centro de la pieza para el tiempo  $t$  considerado.

$$T(0, 0, 0, t) = \theta(0, 0, 0, t) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty$$

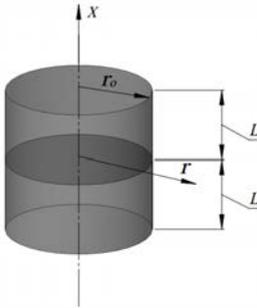
Reemplazando valores, se obtiene:

$$T(0, 0, 0, t) = 0,409 \cdot (180 - 20) + 20 = 85,44^{\circ}\text{C}$$

Si se observa el resultado obtenido, se ve que la temperatura en el centro de la pieza es menor de  $100^{\circ}\text{C}$  que es la temperatura que tendría la pieza en este instante de tiempo si sólo se considera una placa infinita. Esto se debe a que si sólo se considera una placa infinita el intercambio de calor solamente se evalúa en una de las caras, despreciando el calor intercambiado por el resto de la pieza. Cuando el análisis se hace de forma tridimensional se está teniendo en cuenta todo el intercambio de calor posible en la pieza y por tanto, existe más intercambio de calor, y para este caso el enfriamiento es más rápido.

## 5.11 Lata de leche condensada

Un bote cilíndrico de leche condensada de radio  $r_0 = 20$  mm y una altura  $2L = 50$  mm, a una temperatura inicial  $T_i = 20^\circ\text{C}$ , se sumerge en agua en ebullición a una temperatura  $T_\infty = 100^\circ\text{C}$  con un coeficiente de película  $h = 1000$   $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ , para elaborar dulce de leche, que se obtiene cuando la temperatura del contenido del bote es igual o mayor que  $T = 80^\circ\text{C}$ .



Las propiedades del contenido del bote, que se consideran invariantes durante todo el proceso de cocción, son:

$$k = 0,4 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\rho = 850 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$Cp = 2500 \text{ J}/\text{kg} \cdot \text{K}$$

Se pide:

1. Justificar que si el bote es de algún material metálico, la resistencia térmica de las paredes es despreciable respecto de la resistencia térmica de su contenido.
2. Determinar el número de Biot referido al radio del cilindro. ¿Se puede aceptar la hipótesis de temperatura uniforme en el contenido?
3. Con la hipótesis de cilindro infinito y suponiendo un número de Fourier suficientemente alto, determinar el tiempo de cocción.
4. Confirmar la hipótesis de número de Fourier suficientemente alto, realizada en el apartado anterior y calcular la temperatura en la superficie de la lata.
5. Cuando la relación altura/diámetro del bote cilíndrico no permite suponer que este es infinito, determinar el tiempo necesario para que el contenido del bote esté a una temperatura mayor o igual a  $80^\circ\text{C}$ .
6. Comparar el resultado numérico obtenido en el apartado anterior con el resultado obtenido en el apartado 3 y analizar si la hipótesis de cilindro infinito es realista o no.
7. Encontrar una relación entre el tiempo de cocción y los parámetros geométricos del problema,  $r_0$  y  $L$ .

8. A la vista del resultado anterior establecer un criterio en términos de  $r_0/L$  a partir del cual la hipótesis de cilindro infinito sea utilizable.

### Apartado 1

La resistencia térmica por conducción es proporcional al espesor e inversamente proporcional a la conductividad térmica.

$$R = \frac{e}{k \cdot A}$$

Teniendo en cuenta que:  $e_{lata} \ll e_{contenido}$  y  $k_{lata} \gg k_{contenido}$ , se puede considerar que la resistencia térmica de la lata es despreciable comparada con la resistencia térmica del contenido de esta.

### Apartado 2

El número de Biot referido al radio del cilindro lo podemos calcular como:

$$Bi = \frac{h \cdot r_0}{k} = \frac{1000 \cdot 0,02}{0,4} = 50$$

Dado que  $Bi \gg 0,1$  no se puede aceptar la hipótesis de temperatura uniforme en el contenido.

### Apartado 3

Para hallar el tiempo de cocción (tiempo para que la temperatura del contenido en el eje de la lata sea de  $80^\circ\text{C}$ ) hay que despejarlo de la siguiente ecuación, teniendo en cuenta que la variable tiempo está incluida en la definición del número de Fourier.

$$\theta(0, t) = \theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$$

$$\frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{r_0^2})}$$

$$t = - \left[ \ln \left( \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) - \ln C_1 \right] \cdot \frac{r_0^2}{\xi_1^2 \cdot \alpha}$$

Los valores de las constantes se obtienen de tablas de anexo en función del número de Biot y la forma geométrica considerada, en este caso un cilindro infinito.

Para  $Bi = 50 \Rightarrow C_1 = 1,6002$  y  $\xi_1 = 2,3572$

El valor de la difusividad térmica se puede calcular a partir de los datos del problema.

$$\alpha = \frac{k}{Cp \cdot \rho} = \frac{0,4}{2500 \cdot 850} = 1,882 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando valores se puede ahora calcular el tiempo de cocción necesario.

$$t = - \left[ \ln \left( \frac{80 - 100}{20 - 100} \right) - \ln 1,6002 \right] \cdot \frac{0,02^2}{2,3572^2 \cdot 1,882 \cdot 10^{-7}} = 709,97 \text{ s}$$

#### Apartado 4

Para el tiempo calculado en el apartado anterior, el número de Fourier se calcula como:

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{r_0^2} = \frac{1,882 \cdot 10^{-7} \cdot 709,97}{0,02^2} = 0,334$$

Teniendo en cuenta que la aproximación utilizada en el apartado 3 es válida cuando el número de Fourier es mayor de 0,2, se puede considerar que la hipótesis de que el número de Fourier suficientemente alto es válida.

Para calcular la temperatura en la superficie de la lata se debe calcular la temperatura adimensional  $\theta(r, T)$ , caracterizada para  $r = r_0$ .

$$\theta(r_0, t) = \frac{T(r_0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot J_0(\xi_1 \cdot (r_0/r_0))$$

La función de Bessel  $J_0$  vale:  $J_0(2,3572) = 0,0240$ . Reemplazando y despejando la temperatura en la superficie se obtiene:

$$T(r_0, t) = \left[ [C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot J_0(\xi_1 \cdot 1)] \cdot (T_i - T_\infty) \right] + T_\infty$$

$$T(r_0, t) = \left[ [1,6002 \cdot e^{-(2,3572^2 \cdot 0,334)} \cdot 0,0240] \cdot (20 - 100) \right] + 100 = 99,52^\circ\text{C}$$

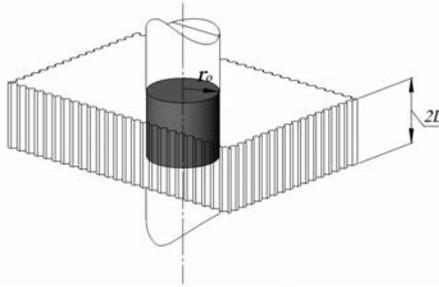
Lo que confirma que la temperatura en el interior de la lata no puede considerarse homogénea, tal como se dijo en el apartado 1.

## Apartado 5

Para calcular el tiempo de cocción cuando no podemos considerar la hipótesis de cilindro infinito, debemos suponer que:

$$\theta(0, 0, t)_{\text{cilindro corto}} = \theta(0, t)_{\text{cilindro } \infty} \cdot \theta(0, t)_{\text{placa } \infty}$$

$$\left( \frac{T(0, 0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{cilindro corto}} = \left( \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{cilindro } \infty} \cdot \left( \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{placa } \infty}$$



**Figura 5.11.1:** Representación esquemática de la intersección de una placa infinita de  $2L = 50$  mm con un cilindro infinito de  $r_0 = 20$  mm

Lo que se intenta hallar es el tiempo para alcanzar la temperatura de  $80^{\circ}\text{C}$  en el centro de la intersección del cilindro infinito y la placa infinita.

$$\theta(0, 0, t)_{cc} = \theta(0, t)_{c\infty} \cdot \theta(0, t)_{p\infty}$$

$$\theta(0, 0, t)_{cc} = C_{1_{c\infty}} \cdot e^{-(\xi_{1_{c\infty}}^2 \cdot Fo_{c\infty})} \cdot C_{1_{p\infty}} \cdot e^{-(\xi_{1_{p\infty}}^2 \cdot Fo_{p\infty})}$$

$$t = -\ln \left( \frac{\theta(0, 0, t)_{cc}}{C_{1_{c\infty}} \cdot C_{1_{p\infty}}} \right) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{\xi_{1_{c\infty}}^2}{r_0^2} + \frac{\xi_{1_{p\infty}}^2}{L^2}}$$

Hay que tener en cuenta que para aplicar la ecuación anterior hay que calcular un número de Biot diferente para el cilindro y la placa, por lo tanto, los valores de las constantes también serán diferentes.

Para el caso del cilindro, sirven los valores obtenidos en el apartado 3, es decir:

$$Bi_{c\infty} = 50 \Rightarrow C_{1c\infty} = 1,6002 \text{ y } \xi_{1c\infty} = 2,3572$$

Para la placa hay que calcularlos teniendo en cuenta que la longitud característica en este caso es  $L$  y no  $r_0$ .

$$Bi_{p\infty} = \frac{h \cdot L}{k} = \frac{1000 \cdot 0,025}{0,4} = 62,5$$

Para  $Bi_{p\infty} = 62,5$  las constantes para una placa plana tienen los siguientes valores:

$$C_{1p\infty} = 1,2728 \text{ y } \xi_{1p\infty} = 1,5430$$

Antes de hallar el tiempo se calcula la temperatura adimensional para la que se quiere obtener el tiempo de cocción.

$$\theta(0,0,t)_{cc} = \left( \frac{T(0,0,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{cc} = \frac{80 - 100}{20 - 100} = 0,25$$

Reemplazando valores en la ecuación obtenida para el tiempo de cocción:

$$t = -\ln\left(\frac{0,25}{1,6002 \cdot 1,2728}\right) \cdot \frac{1}{1,882 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1}{\frac{2,3572^2}{0,02^2} + \frac{1,5430^2}{0,025^2}} = 629,6 \text{ s}$$

## Apartado 6

El tiempo calculado para el cilindro infinito fue del orden de 710 segundos y para el cilindro corto del orden de 630 segundos, lo que implica una diferencia porcentual en torno al 12%, por lo que la hipótesis de cilindro infinito no es válida.

### Apartado 7

Partiendo de la ecuación del tiempo de cocción obtenida en el apartado 5 se puede llegar a una ecuación donde el tiempo  $t$  es función de la relación  $r_0/L$ .

$$t = -\ln\left(\frac{\theta(0,0,t)_{cc}}{C_{1c\infty} \cdot C_{1p\infty}}\right) \cdot \frac{r_0^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi_{1c\infty}^2 + \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \cdot \xi_{1p\infty}^2}$$

### Apartado 8

Para analizar a partir de qué valor de  $r_0/L$  la hipótesis de cilindro infinito es válida, hay que analizar primero si cuando aumentamos  $L$  el número de Fourier calculado para la placa plana tiene un valor mayor de 0,2. Si ésto no sucede aplicar la ecuación obtenida en el apartado 7 para analizar la relación  $r_0/L$  puede conducir a un error.

Para  $L = 0,025$  m (dato del problema)  $r_0/L = 0,8$   $Fo_{Placa} \sim 0,19$

Para  $L = 0,040$  m  $r_0/L = 0,5$   $Fo_{Placa} \sim 0,019$

Observando los valores del número de Fourier, podemos concluir que es incluso arriesgado aceptar como válidos los resultados obtenidos a partir de la ecuación del apartado anterior ya que no se cumple que  $Fo > 0,2$ .

Sin embargo, si suponemos válida la ecuación y calculamos el tiempo para  $r_0/L = 0,5$  se observa que el tiempo necesario es del mismo orden que para el cilindro infinito, por lo que se podría considerar a partir de esta relación la hipótesis de cilindro infinito como válida.

## 5.12 Tratamiento térmico de recocido

Unas piezas de acero con unas dimensiones de  $1 \times 1 \times 0,2$  m deben someterse a un tratamiento térmico de recocido. Para ello se introducen a una temperatura inicial  $T_i = 100^\circ\text{C}$  en un horno en el que el aire está a una temperatura  $T_\infty = 700^\circ\text{C}$ .

Las propiedades del aire y del acero utilizado se pueden considerar constantes y son:

Datos del Aire:

$$k_{ai} = 0,0658 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\nu_{ai} = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pr} = 0,709$$

Datos del acero:

$$k_{ac} = 60 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$\rho_{ac} = 8000 \text{ kg/m}^3$$

$$\alpha_{ac} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Cp_{ac} = 375 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Se pide:

1. Aceptando la hipótesis de placa infinita de espesor  $2L = 0,2$  m, determinar cuál debe ser el coeficiente de película máximo y por tanto el número de Biot máximo para asegurar que el gradiente de temperatura espacial en la pieza,  $dT(x, t)/dx$ , no sobrepase localmente en ningún instante los  $1200^\circ\text{C}$  por metro para evitar tensiones térmicas.
2. A la vista del número de Biot obtenido en el apartado anterior, discutir si es o no aceptable la hipótesis de temperatura uniforme en el cuerpo.
3. Determinar el tiempo necesario para que en el centro de las piezas se alcance una temperatura de  $650^\circ\text{C}$ . Calcular el número de Fourier para estas condiciones.
4. Determinar para el instante considerado en el apartado 3 cuánto vale la temperatura en la superficie de las piezas. Discutir el resultado a la vista de la respuesta al apartado 2.
5. Determinar el tiempo necesario y el calor total aportado a cada pieza para que la temperatura en cualquier punto de las piezas sea al menos de  $695^\circ\text{C}$ .
6. Asumiendo las hipótesis del problema calcula la variación “media” de temperatura en el centro y en la superficie de la pieza durante los primeros 5 minutos.
7. Confirmar para las condiciones del apartado 3 si la hipótesis de placa infinita es aceptable.
8. Determinar el número de Nusselt del proceso de transmisión de calor por convección entre el aire y las placas, suponiendo que la corriente de aire

es paralela a la cara más grande de la pieza y por lo tanto, la longitud característica es de 1 m.

- Determinar el número de Reynolds del flujo de aire alrededor de las piezas y la velocidad del aire necesaria para garantizar el proceso.

## Apartado 1

El gradiente máximo de temperatura ocurre para el instante  $t = 0$  en la superficie de la pieza  $x = L$ .

Si se parte de la definición de  $h$ :

$$h = \frac{-k_{ac} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L}}{T_{pared} - T_{fluido}}$$

Siendo el gradiente de temperatura el máximo admitido, la temperatura del fluido es  $T_{\infty}$  y la temperatura de la pared es  $T_i$ . Reemplazando valores, se obtiene:

$$h = \frac{-60 \cdot 1200}{(100 - 700)} = 120 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Para calcular el número de Biot se puede utilizar como longitud característica la relación volumen/área, que en este caso es  $2L$ , o bien, utilizando el valor de  $L$  de acuerdo a como se define cuando se considera una placa infinita.

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot 2L}{k_{ac}} = \frac{120 \cdot (2 \cdot 0,1)}{60} = 0,4$$

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot L}{k_{ac}} = \frac{120 \cdot 0,1}{60} = 0,2$$

## Apartado 2

Para cualquiera de las dos definiciones, el número de Biot es mayor que 0,1, por lo tanto, no se puede considerar que la temperatura sea homogénea en toda la pieza.

### Apartado 3

Si se acepta la hipótesis de placa infinita de espesor  $2L$ , la ecuación para calcular la temperatura en el centro de la placa cuando  $Fo > 0,2$  se puede escribir como:

$$\theta(0, t) = \theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)}$$

Donde  $C_1$  y  $\xi_1$  son coeficientes tabulados en función del número de Biot, utilizando como longitud característica  $L$ .

En este caso, el número de Bi = 0,2 como ya se calculó en el apartado 1, los valores de los coeficientes para este valor de Bi son:

$$C_1 = 1,0311 \quad \text{y} \quad \xi_1 = 0,4328$$

Despejando el número de Fourier de la ecuación y reemplazando valores se obtiene:

$$\ln \frac{\theta_0}{C_1} = -(\xi_1^2 \cdot Fo) \quad \Rightarrow \quad Fo = -\frac{1}{\xi_1^2} \cdot \ln \frac{\theta_0}{C_1}$$

$$\theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{650 - 700}{100 - 700} = 0,0833$$

$$Fo = -\frac{1}{0,4328^2} \cdot \ln \frac{0,0833}{1,0311} = 13,249$$

Teniendo en cuenta que el valor obtenido  $Fo > 0,2$ , es válido considerar sólo el primer término del desarrollo en serie para el cálculo de la temperatura.

El tiempo necesario para obtener  $650^\circ\text{C}$  en el centro de la placa se puede despejar de la definición del número de Fourier, obtenido anteriormente.

$$Fo = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{L^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Fo \cdot L^2}{\alpha_{ac}}$$

$$t = \frac{13,429 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 10^{-5}} = 6714,5 \text{ s} = 1\text{h } 51\text{m } 54,5\text{s}$$

#### Apartado 4

Para una placa infinita, la temperatura en cualquier espesor de la placa se puede calcular cuando  $Fo > 0,2$  como:

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} \cdot \cos(\xi_1 \cdot x/L) = \theta_0 \cdot \cos(\xi_1 \cdot x/L)$$

En la superficie de la placa  $x = L$ , reemplazando en la ecuación los valores obtenidos en el apartado anterior se obtiene:

$$\theta(L, t) = 1,0311 \cdot e^{-(0,4328^2 \cdot 13,429)} \cdot \cos(0,4328 \cdot 1) = 0,07565$$

$$T(L, t) = \theta(L, t) \cdot (T_i - T_{\infty}) + T_{\infty} = 0,07565 \cdot (100 - 700) + 700 = 654,6^{\circ}\text{C}$$

La diferencia de temperaturas entre el centro y la superficie es  $4,6^{\circ}\text{C}$  o expresado en términos porcentuales, una diferencia de  $0,7\%$ , lo que es razonable teniendo en cuenta que el número de Biot aunque mayor que  $0,1$  es lo suficientemente bajo como para que la temperatura pueda considerarse cuasi uniforme.

#### Apartado 5

Para calcular el tiempo necesario para que en el centro se alcancen  $695^{\circ}\text{C}$  se debe proceder de forma similar a lo realizado en el apartado 3, es decir, calcular el número de Fourier y despejar el tiempo, teniendo en cuenta que en este caso la temperatura adimensional ha cambiado.

$$Fo = -\frac{1}{\xi_1^2} \cdot \ln \frac{\theta_0}{C_1}$$

Los coeficientes  $C_1$  y  $\xi_1$ , no cambian ya que sólo dependen del número de Biot.

$$\theta_0 = \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{695 - 700}{100 - 700} = 0,0083$$

$$Fo = -\frac{1}{0,4328^2} \cdot \ln \frac{0,0083}{1,0311} = 25,722$$

El tiempo necesario para obtener la 695°C en el centro de la placa se calcula como:

$$t = \frac{Fo \cdot L^2}{\alpha_{ac}}$$

$$t = \frac{25,722 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 10^{-5}} = 12860,9 \text{ s} = 3\text{h } 34\text{m } 20,9\text{s}$$

Como puede observarse es necesario casi duplicar el tiempo necesario para incrementar la temperatura desde 650 a 695°C.

En general, para un cuerpo que cambia su temperatura durante un transitorio térmico desde una temperatura inicial  $T_i$  hasta una temperatura final  $T_\infty$ , la cantidad de calor máxima que se debe aportar al cuerpo (o que el cuerpo cede si es un enfriamiento) se puede expresar como:

$$q_{max} = m \cdot Cp_{ac} \cdot (T_\infty - T_i) = \rho_{ac} \cdot V \cdot Cp_{ac} \cdot (T_\infty - T_i)$$

Siendo  $m$  y  $V$ , la masa y el volumen del cuerpo respectivamente.

Para el caso de la placa plana este calor máximo es:

$$q_{max} = 8000 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 0,2) \cdot 375 \cdot (700 - 100) = 3,6 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Para hallar la cantidad de calor que hay que aportar hasta un determinado instante antes de que el cuerpo alcance la temperatura final se utiliza la expresión:

$$\frac{q}{q_{max}} = 1 - \theta_0 \cdot \frac{\text{sen } \xi_1}{\xi_1}$$

Utilizando como temperatura adimensional en el centro de la placa el valor correspondiente al instante de tiempo en el que se quiere conocer la cantidad de calor aportado. Reemplazando valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{q}{q_{max}} = 1 - 0,00833 \cdot \frac{\text{sen } 0,4328}{0,4328} = 0,9919$$

Y por lo tanto, el calor necesario que hay que aportar a la pieza será:

$$q = 0,9919 \cdot q_{max} = 3,571 \cdot 10^8 \text{ J}$$

## Apartado 6

Para un tiempo de 5 minutos el número de Fourier se puede calcular como:

$$Fo = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{L^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{0,1^2} = 0,6$$

Teniendo en cuenta que  $Fo > 0,2$  se puede calcular la temperatura en el centro y la superficie con las mismas expresiones utilizadas anteriormente (las constantes  $C_1$  y  $\xi_1$  permanecen inalteradas ya que el número de Biot no ha cambiado).

Para el centro de la placa:

$$\theta(0, t) = \theta_0 = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot Fo)} = 1,0311 \cdot e^{-(0,4328^2 \cdot 0,6)}$$

$$\theta_0 = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,9215$$

$$T(0, t) = \theta_0 \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,9215 \cdot (100 - 700) + 700 = 147,1^\circ\text{C}$$

Para la superficie de la placa ( $x = L$ ):

$$\theta(L, t) = \theta_0 \cdot \cos(\xi_1 \cdot L/L) = 0,9215 \cdot \cos(0,4328 \cdot 1)$$

$$\theta(L, t) = \frac{T(L, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,8365$$

$$T(L, t) = \theta(L, t) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,8365 \cdot (100 - 700) + 700 = 198,1^\circ\text{C}$$

Con estos valores de temperatura del centro y la superficie de la placa, para un tiempo de 5 minutos se puede calcular cuánto ha sido el incremento de temperatura por minuto si se asume una variación lineal de ésta durante este tiempo. Esto es una hipótesis que no es correcta pero que puede servir para dar órdenes de magnitud de cuanto es el incremento máximo de temperatura ya que éste se producirá en los primeros minutos del calentamiento, para luego ir disminuyendo debido a la menor diferencia de temperaturas entre la pieza y el aire del horno.

Incremento de temperatura medio en el centro de la placa:

$$\frac{\Delta T_{\text{centro}}}{\text{minuto}} = \frac{147,1 - 100}{5} = 9,42^\circ\text{C}$$

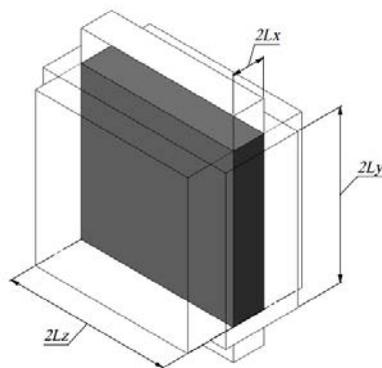
Incremento de temperatura medio en la superficie de la placa:

$$\frac{\Delta T_{\text{superficie}}}{\text{minuto}} = \frac{198,1 - 100}{5} = 19,62^\circ\text{C}$$

### Apartado 7

Para poder evaluar si la hipótesis hecha en el apartado 3 es válida o no, se procederá a calcular la temperatura en el centro de la pieza considerando que la relación entre las dimensiones de la pieza no permite asumir la hipótesis de placa infinita. En este caso particular el campo tridimensional de temperaturas se obtiene como el producto de los campos de temperatura de tres placas infinitas de dimensiones  $2L_x = 0,2$ ,  $2L_y = 1$  y  $2L_z = 1$  respectivamente, ortogonales entre sí, tal como se representa en la figura 5.12.1.

$$\begin{aligned} \left( \frac{T(x, y, z, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{pieza}} &= \\ &= \left( \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_x=0,2}^{\text{placa}} \cdot \left( \frac{T(y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_y=1}^{\text{placa}} \cdot \left( \frac{T(z, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_z=1}^{\text{placa}} \end{aligned}$$



**Figura 5.12.1:** Representación esquemática de la intersección de tres placas de dimensiones  $2L_x$ ,  $2L_y$  y  $2L_z$

Hay que tener en cuenta que la longitud característica tanto para el número de Biot como para el de Fourier se define de forma individual para cada placa infinita.

De acuerdo a lo obtenido en el apartado 3, si la placa es infinita, la temperatura de 650°C en el centro de la placa se alcanza en 6714,5 s. Para este mismo tiempo se calculará la temperatura de la placa tridimensional y se comparará el resultado obtenido.

Placa de espesor  $2L_x = 0,2$ , temperatura en el centro  $x = 0$ .

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot L_x}{k_{ac}} = \frac{120 \cdot 0,1}{60} = 0,2$$

$$C_1 = 1,0311 \quad \text{y} \quad \xi_1 = 0,4328$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{L_x^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 6714,5}{0,1^2} = 13,429$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot \text{Fo})} = 1,0311 \cdot e^{-(0,4328^2 \cdot 13,429)} = 0,0833$$

Placa de espesor  $2L_y = 1$ , temperatura en el centro  $y = 0$ .

$$\text{Bi} = \frac{h \cdot L_y}{k_{ac}} = \frac{120 \cdot 0,5}{60} = 1$$

$$C_1 = 1,1191 \quad \text{y} \quad \xi_1 = 0,8603$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha_{ac} \cdot t}{L_x^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 6714,5}{0,1^2} = 0,537$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 = C_1 \cdot e^{-(\xi_1^2 \cdot \text{Fo})} = 1,1191 \cdot e^{-(0,8603^2 \cdot 0,537)} = 0,7519$$

Para la placa de espesor  $2L_z = 1$  los resultados son idénticos que los obtenidos en el caso anterior.

Reemplazando los valores en la ecuación del campo de temperatura de la pieza tridimensional se puede obtener la temperatura en el centro de la pieza.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{T(0,0,0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{pieza} = \\ & = \left( \frac{T(0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_x=0,2}^{placa} \cdot \left( \frac{T(0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_y=1}^{placa} \cdot \left( \frac{T(0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{2L_z=1}^{placa} \\ \theta(0,0,0,t) & = \left( \frac{T(0,0,0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{pieza} = 0,0833 \cdot 0,7519 \cdot 0,7519 = 0,0471 \end{aligned}$$

$$T(0,0,0,t) = \theta(0,0,0,t) \cdot (T_i - T_\infty) + T_\infty = 0,0471 \cdot (100 - 700) + 700$$

$$T(0,0,0,t) = 671,7^\circ\text{C}$$

El error cometido en la temperatura en el centro al considerar la hipótesis del apartado 3, de placa infinita en lugar de placa tridimensional, es de 3,2%.

## Apartado 8

El número de Nusselt se define como:

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot L_c}{k_{ai}}$$

Siendo  $L_c$  la longitud característica igual a la longitud por donde se desplaza la corriente de aire que en este caso es 1 m. Reemplazando valores se obtiene:

$$\text{Nu} = \frac{120 \cdot 1}{6,58 \cdot 10^{-2}} = 1823,7$$

## Apartado 9

Para calcular el número de Reynolds es necesario utilizar una correlación del número de Nusselt para las características de este problema, es decir, flujo externo en placas planas con la dificultad añadida de que a priori no se sabe qué condiciones de flujo, laminar o turbulento, tiene el problema.

Se calcula entonces el número de Reynolds con una correlación que tiene en cuenta el flujo mixto, es decir, cuando ocurre la transición de laminar a turbulento, para luego verificar a partir del número de Reynolds obtenido la validez de esta hipótesis.

La correlación que se utiliza es:

$$\text{Nu} = 0,0377 \cdot (\text{Re}_L^{4/5} - 871) \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

Esta correlación es válida para  $\text{Re}_L > 5 \cdot 10^5$ . De esta correlación se puede despejar el número de Reynolds de la siguiente forma:

$$\text{Re}_L = \left( \frac{\text{Nu}}{0,0377 \cdot \text{Pr}^{1/3}} + 871 \right)^{5/4} = \left( \frac{1823,7}{0,0377 \cdot 0,709^{1/3}} + 871 \right)^{5/4}$$

$$\text{Re}_L = 844583,4$$

Teniendo en cuenta el valor obtenido, se puede considerar que la correlación utilizada es correcta para las condiciones del problema.

La velocidad de la corriente de aire que garantice estas condiciones del problema, se calcula a partir de la definición del número de Reynolds.

$$\text{Re}_L = \frac{u \cdot L_c}{\nu_{ai}} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\text{Re}_L \cdot \nu_{ai}}{L}$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$u = \frac{844583,4 \cdot 1,13 \cdot 10^{-4}}{1} = 95,44 \text{ m/s}$$



# Anexos

## Coeficientes $\xi_1$ y $C_1$ en función del número de Biot

**Tabla A.1:** Pared plana infinita de espesor  $2L$  y  $Bi = h \cdot L/k$

Biot	$\xi_1$	$C_1$
0,01	0,0998	1,0017
0,02	0,1410	1,0033
0,04	0,1987	1,0066
0,06	0,2425	1,0098
0,08	0,2791	1,0130
0,1	0,3111	1,0161
0,2	0,4328	1,0311
0,3	0,5218	1,0450
0,4	0,5932	1,0580
0,5	0,6533	1,0701
0,6	0,7051	1,0814
0,7	0,7506	1,0918
0,8	0,7910	1,1016
0,9	0,8274	1,1107
1,0	0,8603	1,1191
2,0	1,0769	1,1785
3,0	1,1925	1,2102
4,0	1,2646	1,2287
5,0	1,3138	1,2403
6,0	1,3496	1,2479
7,0	1,3766	1,2532
8,0	1,3978	1,2570
9,0	1,4149	1,2598
10	1,4289	1,2620
20	1,4961	1,2699
30	1,5202	1,2717
40	1,5325	1,2723
50	1,5400	1,2727
100	1,5552	1,2731
$\infty$	1,5708	1,2732

**Tabla A.2:** Cilindro infinito de radio  $r_0$  y  $Bi = h \cdot r_0/k$

Biot	$\xi_1$	$C_1$
0,01	0,1412	1,0025
0,02	0,1995	1,0050
0,04	0,2814	1,0099
0,06	0,3438	1,0148
0,08	0,3960	1,0197
0,1	0,4417	1,0246
0,2	0,6170	1,0483
0,3	0,7465	1,0712
0,4	0,8516	1,0931
0,5	0,9408	1,1143
0,6	1,0184	1,1345
0,7	1,0873	1,1539
0,8	1,1490	1,1724
0,9	1,2048	1,1902
1,0	1,2558	1,2071
2,0	1,5995	1,3384
3,0	1,7887	1,4191
4,0	1,9081	1,4698
5,0	1,9898	1,5029
6,0	2,0490	1,5253
7,0	2,0937	1,5411
8,0	2,1286	1,5526
9,0	2,1566	1,5611
10	2,1795	1,5617
20	2,2880	1,5919
30	2,3261	1,5973
40	2,3455	1,5993
50	2,3572	1,6002
100	2,3809	1,6015
$\infty$	2,4048	1,6021

**Tabla A.3:** Esfera de radio  $r_0$  y  $Bi = h \cdot r_0/k$ 

Biot	$\xi_1$	$C_1$
0,01	0,1730	1,0030
0,02	0,2445	1,0060
0,04	0,3450	1,0120
0,06	0,4217	1,0179
0,08	0,4860	1,0239
0,1	0,5423	1,0298
0,2	0,7593	1,0592
0,3	0,9208	1,0880
0,4	1,0528	1,1164
0,5	1,1656	1,1441
0,6	1,2644	1,1713
0,7	1,3525	1,1978
0,8	1,4320	1,2236
0,9	1,5044	1,2488
1,0	1,5708	1,2732
2,0	2,0288	1,4793
3,0	2,2889	1,6227
4,0	2,4556	1,7202
5,0	2,5704	1,7870
6,0	2,6537	1,8338
7,0	2,7165	1,8673
8,0	2,7654	1,8920
9,0	2,8044	1,9106
10	2,8363	1,9249
20	2,9857	1,9781
30	3,0372	1,9898
40	3,0632	1,9942
50	3,0788	1,9962
100	3,1102	1,9990
$\infty$	3,1416	2,0000

## Funciones de Bessel

**Tabla A.4:** Primera especie de cero y primer orden

$\eta$	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0	0,7652	0,4400
1,1	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399
2,4	0,0025	0,5202
2,6	-0,0968	-0,4708
2,8	-0,1850	-0,4097
3,0	-0,2601	-0,3391
3,2	-0,3202	-0,2613

# Bibliografía

## Bibliografía básica

Çengel, Y.A. *Transferencia de calor y masa: un enfoque práctico*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 2007.

Incropera, F.P. y D.P. DeWitt. *Fundamentos de transferencia de calor*. Prentice Hall, 1999.

Welty, J.R.A., C.E.A. Wicks y R.E.A. Wilson. *Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa*. Colección Textos Politécnicos. Serie Tecnologías mecánicas. Editorial Limusa S.A., 1999.

## Bibliografía de consulta

Bejan, A. *Convection Heat Transfer*. Wiley, 2013.

Bird, R.B., W.E. Stewart y E.N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley International edition. Wiley, 2007.

Carslaw, H.S. y J.J.C. Jaeger. *Conduction of heat in Solids*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 1986.

Kraus, A.D., A. Aziz y J. Welty. *Extended Surface Heat Transfer*. Wiley, 2002.

Mills, A.F. *Transferencia de calor*. Times Mirror de España, 1995.